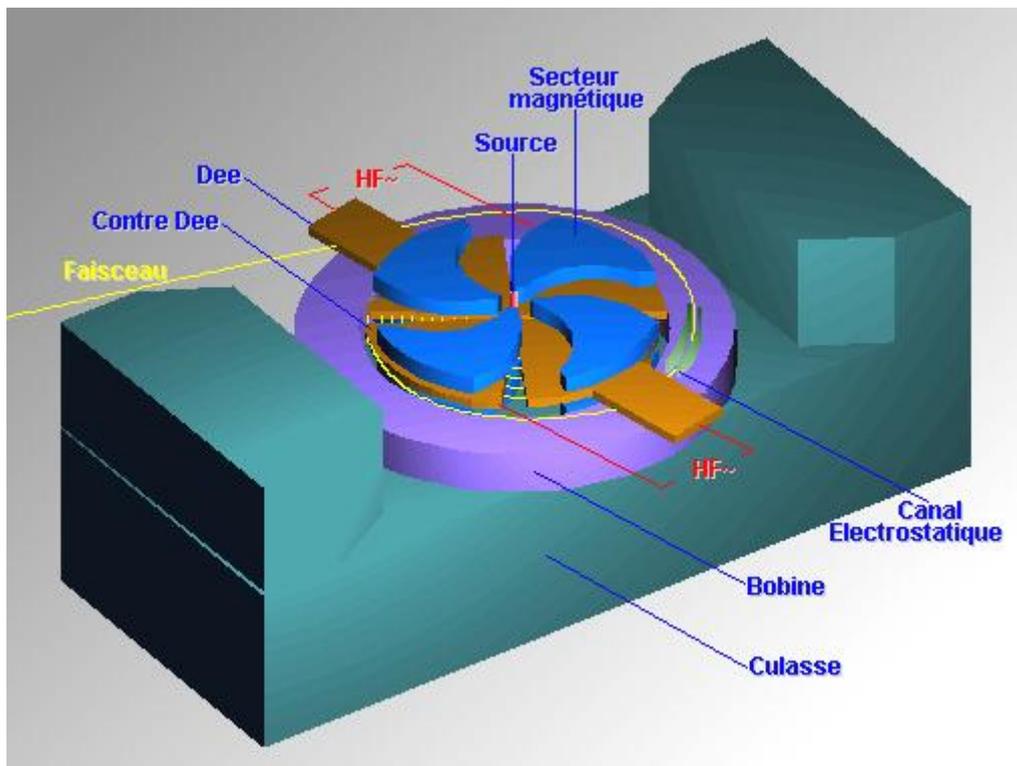


Introduction aux Accélérateurs de particules



L.Luquin
Bureau A247
☎ 02 51 85 81 40
lionel.luquin@mines-nantes.fr

Avertissement

Ce cours a pour but de donner les bases théoriques minimales nécessaires à la compréhension du fonctionnement des accélérateurs de particules. Il n'est en aucun cas destiné à former des ingénieurs faisceau.

Table des Matières

<u>CHAPITRE 1</u>	<u>INTRODUCTION</u>	1
POURQUOI UTILISER DES ACCELERATEURS		1
PRINCIPES GENERAUX		1
ELECTROMAGNETISME		2
RELATIVITE RESTREINTE		2
CARACTERISTIQUES		3
EMITTANCE		3
LUMINOSITE		4
FACTEUR D'UTILISATION		4
CLASSIFICATION		4
ACCELERATEUR A TENSION CONTINUE		4
ACCELERATEUR LINEAIRE		5
CYCLOTRON CLASSIQUE		5
SYNCHROCYCLOTRON		5
CYCLOTRON ISOCHRONE		5
SYNCHROTRON		6
COLLISIONNEURS		6
<u>CHAPITRE 2</u>	<u>SOURCES DE PARTICULES</u>	7
INTRODUCTION		7
SOURCES D'ELECTRONS		7
PRINCIPE DE L'EMISSION THERMIQUE		7
EMISSION EN CHAMP FORT		8
PRINCIPE DE LA PHOTO-EMISSION		10
SOURCES D'IONS		11
SOURCES A FILAMENTS		13
PLASMATRON ET DUOPLASMATRON		13
MAGNETRON ET SOURCE PENNING		14
Magnétron		14
Source Penning (PIG)		16
SOURCE "ELECTRON BEAM ION SOURCE" (EBIS)		16
SOURCE "ELECTRON CYCLOTRON RESONANCE" (ECR)		17
GRANDEURS CARACTERISTIQUES DES SOURCES		20
SOURCES DE PROTONS		20
SOURCES D'IONS		20
<u>CHAPITRE 3</u>	<u>ACCELERATEURS A TENSION CONTINUE</u>	22
INTRODUCTION		22
COURANT DEBITE ET ENERGIE		22
CONTRAINTES DES ACCELERATEURS ELECTROSTATIQUES		24
ACCELERATEUR COCKCROFT-WALTON		25
ACCÉLÉRATEUR VAN DE GRAAFF		26
TANDEM VAN DE GRAAFF		27
<u>CHAPITRE 4</u>	<u>ACCELERATEURS LINEAIRES</u>	29

INTRODUCTION	29
THEORIE DES ACCELERATEURS LINEAIRES	30
RAPPELS	30
CHAMP ACCELERATEUR	30
GROUPEMENT LONGITUDINAL	35
GAIN EN ENERGIE	37
MOUVEMENT LONGITUDINAL DANS UNE STRUCTURE PERIODIQUE	40
PARAMETRES DES CAVITES	40
LES DIFFERENTES STRUCTURES ACCELERATRICES	42
ACCELERATEURS LINEAIRES A IONS	46
ACCELERATEURS LINEAIRES A ELECTRONS	46
<u>CHAPITRE 5</u> <u>THEORIE DES ACCELERATEURS CIRCULAIRES</u>	<u>47</u>
INTRODUCTION	47
PARTICULES DE REFERENCES	47
ETUDE DES OSCILLATIONS (PARTICULES REELLES)	51
OSCILLATIONS BETATRONIQUES	51
MATRICE DE TRANSFERT	56
EQUATION DE HILL. THEOREME DE FLOQUET	58
NOMBRE D'ONDE	59
EMITTANCE ET ACCEPTANCE	63
INFLUENCE DE LA DISPERSION EN ENERGIE	63
OSCILLATIONS SYNCHROTRONIQUES	64
<u>CHAPITRE 6</u> <u>CYCLOTRONS</u>	<u>65</u>
INTRODUCTION	65
FREQUENCE DE REVOLUTION ET ENERGIE	65
CYCLOTRON CLASSIQUE	66
SYNCHROCYCLOTRON	68
FREQUENCE	68
FONCTIONNEMENT	68
EXEMPLE DE SYNCHROCYCLOTRONS	69
CYCLOTRON ISOCHRONE	70
QUELQUES EXEMPLES DE CYCLOTRONS	74
PSI	74
CYCLONE	76
GANIL	77
AGOR	79
<u>CHAPITRE 7</u> <u>SYNCHROTRONS</u>	<u>81</u>
INTRODUCTION	81
MAILLE DE MACHINE	83
SECTION DROITE O	83
SECTION DIPOLAIRE B	83
SECTION QUADRUPLOAIRE PURE Q	83
SECTION FOCALISANTE F	83
SECTION DEFOCALISANTE D	83
SYNCHROTRON A FOCALISATION FORTE	84
QUELQUES EXEMPLES DE SYNCHROTRONS	86

CHAPITRE 8	COLLISIONNEURS	89
INTRODUCTION		89
LUMINOSITE		89
COLLISIONNEURS	$p\bar{p}$	89
COLLISIONNEURS	E+E-	89
COLLISIONNEURS LINEAIRES	E+E-	91
ANNEXE A		93
ANNEXE B		95
BIBLIOGRAPHIE		97

Chapitre 1 Introduction

Pourquoi utiliser des accélérateurs

L'étude des propriétés de l'atome, du noyau et des nucléons a longtemps été le moteur du développement des accélérateurs. En 1919, Rutherford, avec son expérience de bombardement de noyaux d'Azote par les particules α émises par le radium, utilisait un accélérateur « naturel ». Très vite, les physiciens perçurent la nécessité d'avoir des sources de particules accélérées pour mener à bien leurs recherches car la radioactivité naturelle ne fournit pas toutes les énergies. Avec la découverte des particules élémentaires et des quatre forces fondamentales (gravitation, électromagnétisme, force faible, force forte), la physique des hautes énergies a besoin de machines de plus en plus puissantes et complexes. Les projectiles indispensables aux expériences sont aujourd'hui pratiquement toujours produits par des accélérateurs (la physique des astro-particules utilisent une autre méthode). La quête d'une grande théorie unifiant l'interaction forte, l'interaction faible, l'électromagnétisme et la gravitation assure aux accélérateurs de particules encore quelques décennies de développement et de mise en œuvre.

Mais la recherche fondamentale n'est pas le seul domaine d'utilisation des accélérateurs. Actuellement, la majorité d'entre eux sont utilisés dans des activités publiques et commerciales :

- Médecine (radiothérapie, fabrication de source radioactives ...)
- Electronique (traitement de surface)
- Archéologie, Beaux arts
- Stérilisation d'instruments (médecine), d'aliments
- Retraitement des déchets nucléaires
- ...

Très souvent, des accélérateurs Van de Graff ou de petits cyclotrons suffisent à ces applications. Cependant, dans ce cours nous prendrons souvent comme exemple des accélérateurs utilisés dans le domaine de la recherche scientifique car leur données techniques sont plus facilement accessibles.

Principes généraux

Un des principes connus de l'optique s'applique aussi à la physique nucléaire et des particules :

Un objet ne peut être observé qu'avec un rayonnement dont la longueur d'onde est voisine de la taille de l'objet.

Par exemple, avec des longueurs d'onde dans le domaine du visible ($\lambda = 0.4$ à $0.8 \mu\text{m}$), des cellules, des bactéries, ou des états de surface sont observables. Pour voir des atomes il faut des longueurs d'onde plus petites. Or en 1924 Louis de Broglie a formalisé la dualité onde corpuscule par la relation :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

avec h la constante de Planck, p la quantité de mouvement. Donc plus la quantité de mouvement d'une particule est grande, plus la longueur associée est petite et plus l'objet sondé peut être petit. Par conséquent, la mécanique quantique joue un rôle dans la physique des accélérateurs du fait de la dualité onde-corpuscule.

Les principes généraux mis en œuvre dans les accélérateurs sont l'électromagnétisme et la relativité restreinte.

Electromagnétisme

En 1870, Maxwell a unifié l'électricité et le magnétisme à l'aide des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

La forme utilisée ici (2) pour décrire les équations de Maxwell est générale (avec $c^2=1$ et $\epsilon_0\mu_0c^2=1$). On retrouve facilement les expressions classiques des équations de Maxwell sachant que par définition :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (4)$$

L'équation (3) est la définition de la divergence, c'est un scalaire, (4) est celle du rotationnel. A ces quatre équations il faut rajouter l'expression de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5)$$

qui permet de décrire la force exercée par les champs électrique et magnétique sur une particule de charge q et animée d'une vitesse v . La force de Lorentz nous permettra de déterminer l'équation du mouvement des particules en résolvant :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (6)$$

Pour appliquer ces lois de l'électromagnétisme à des particules proches de la vitesse de la lumière, il faut tenir compte des principes de la relativité restreinte.

Relativité restreinte

Les transformations de Lorentz, qui expriment le passage d'un référentiel R à un référentiel R' en mouvement uniforme à la vitesse v selon l'axe Oxx' , s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \right. \quad (7)$$

γ est le facteur de Lorentz défini par $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

Ces transformations permettent aussi d'obtenir les expressions relativistes de l'impulsion et de l'énergie:

$$\begin{cases} \vec{p} = \gamma m \vec{v} \\ E = \gamma mc^2 = E_c + mc^2 \end{cases} \quad (8)$$

(cf. cours d'initiation à la physique subatomique)

Maintenant, on peut se demander quels sont les champ vus par des particules relativistes. Pour le champ électrique \vec{E} on obtient:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta E_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta E_y) \end{cases} \quad (9)$$

et pour le champ magnétique \vec{B} :

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta B_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta B_y) \end{cases} \quad (10)$$

Caractéristiques

Si l'énergie ainsi que l'intensité sont des caractéristiques du faisceau facilement compréhensibles, il n'en est pas de même pour l'émittance, la luminosité et le facteur d'utilisation.

Emittance

Soit un faisceau de particules se déplaçant suivant l'axe OZ . Son émittance, à une abscisse z , est définie par:

$$\varepsilon_x = \frac{A}{\pi} \quad (11)$$

Où A est l'aire du faisceau dans le plan $(x, \frac{dx}{dz})$. Si le faisceau est de symétrie cylindrique,

l'émittance maximale est $\varepsilon_{max} = \frac{r\Delta\phi}{\pi}$, avec r rayon du faisceau et $\Delta\phi$ sa divergence. De la même manière l'émittance normalisée est définie par:

$$\varepsilon_{nx} = \frac{A'}{\pi m_0 c} \quad (12)$$

Où A' est alors l'aire du faisceau dans le plan (x, p_x) . L'émittance et l'émittance normalisée sont liées par la relation:

$$\varepsilon_{nx} = \beta \gamma \varepsilon_x \quad (13)$$

β et γ sont les facteurs relativistes vus précédemment. Pour une source de particule, la brillance normalisée définie par l'équation 12 est souvent utilisée.

$$B = \frac{I}{\pi^2 \varepsilon_{nx} \varepsilon_{ny}} \quad (14)$$

La brillance d'une source s'exprime en A/(m².rad²).

Luminosité

La luminosité est un paramètre très important des accélérateurs car il permet de déterminer les sections efficaces des phénomènes observés. En effet, le nombre d'événements par secondes d'un processus physique créé par l'interaction de deux faisceaux est égale au produit de la luminosité par la section efficace.

Facteur d'utilisation

Le facteur d'utilisation est la fraction du temps pendant laquelle les particules accélérées sont disponibles par rapport à la durée total d'un cycle. Plus le facteur d'utilisation est grand plus le temps séparant deux particules est grand, ce qui permet aux détecteurs de travailler sans risque d'empilement (cf. cours sur les détecteurs de particules et les problèmes de temps mort). Le facteur d'utilisation dépend donc de l'accélérateur et du type de particules utilisées. Le terme de cycle utile est aussi parfois utilisé, il s'agit du rapport de l'intensité d'un paquet à l'intensité moyenne.

Classification

Les principes d'accélération ont été imaginés, pour la plupart d'entre eux, dans les années 1920-1930. Les technologies de l'époque ne permirent pas de les tester tous. L'évolution des techniques de vide, de réalisation de source, de génération HF permis de construire des accélérateurs de plus en plus puissants et fiables. L'augmentation des performances entraîna aussi une augmentation des coûts ce qui poussa parfois plusieurs pays à se regrouper pour construire un accélérateur (cf. CERN). Voici maintenant les principaux types de machine.

Accélérateur à tension continue

Le principe le plus simple pour construire un accélérateur consiste à établir une différence de potentiel ΔV entre une source de particules chargées q et une cible. Ainsi l'énergie communiquée aux particules sera $E=q\Delta V$. Dans cette catégorie, il existe principalement deux types de machines:

- Les accélérateurs Cockcroft-Walton où la haute tension est générée à partir d'un système redresseur à diode. C'est en 1932 au Cavendish Laboratory de Cambridge que Cockcroft et Walton firent fonctionner leur machine à 600 KV.
- Les accélérateurs Van de Graaff où la tension est générée par accumulation de charges transportées par une courroie. Ce type de machine est très employé, car il permet d'utiliser n'importe quelle source de particules et il délivre un faisceau continu pratiquement mono-énergétique.

L'inconvénient principal des accélérateurs à tension continue est lié aux phénomènes de décharge qui limitent la haute tension obtenue et par conséquent le gain en énergie des particules.

Accélérateur linéaire

Dans les accélérateurs linéaires (appelé LINAC en anglais), la particule est "accompagnée" tout au long de sa trajectoire rectiligne par un champ électrique haute fréquence. En 1931 S.H. Sloan et E.O. Lawrence réalisèrent la première machine de ce type (l'idée a été proposée en 1929 par Widerö en Suisse). Ils étaient alors capables d'accélérer des ions de mercure à 1,26 MeV. Pendant longtemps les machines de ce type furent confrontées aux problèmes liés aux hautes fréquences. C'est le développement de la technologie des radars qui permit un nouvel essor des accélérateurs linéaires. L. Alvarez de l'université de Stanford (USA) accéléra des protons à 32 MeV grâce à un accélérateur linéaire fonctionnant à une fréquence de 200 MHz. Actuellement, des fréquences de l'ordre du GHz sont disponibles et des gains en énergie supérieurs à 50 MeV/m sont obtenus. Cependant, le champ électrique étant pulsé pour limiter la puissance moyenne dissipée, le facteur d'utilisation de ces machines est assez faible. De plus, les énergies requises par la physique fondamentale impliquent des longueurs d'accélérateur incompatibles avec des coûts raisonnables. Ce type de machine est donc principalement utilisé dans l'industrie, pour accélérer des électrons à des fins de stérilisation.

Cyclotron classique

Dans les accélérateurs à tension continue ou les LINAC, les particules ont une trajectoire rectiligne et ne traversent qu'une seule fois la ou les zones accélératrices. Dans les cyclotrons, la trajectoire des particules est une spirale ce qui permet de leur faire traverser un grand nombre de fois un même espace accélérateur. Pour réaliser un cyclotron il suffit donc de créer un champ magnétique uniforme grâce à un électroaimant. Le champ électrique accélérateur, perpendiculaire au champ magnétique, est créé par deux électrodes placées au centre de l'électroaimant. La fréquence de ce champ électrique est aussi constante. La première machine de ce type date de 1932, et elle permit à Lawrence et Livingston d'accélérer des protons à 1,2 MeV. Les cyclotrons classiques sont des machines simples à construire. Cependant, comme nous le verrons dans ce cours, ce type d'accélérateur ne fonctionne qu'avec des particules non relativistes car sinon la condition de synchronisme entre la fréquence de révolution des particules et la fréquence du champ accélérateur n'est pas vérifiée.

Synchrocyclotron

Pour pallier aux difficultés rencontrées avec les cyclotrons classiques, il faut faire décroître la fréquence d'accélération lorsque l'énergie des particules augmente. Dans ces conditions, seules les particules ayant la bonne énergie satisferont la condition de synchronisme et seront accélérées au cours d'un cycle, les autres seront perdues. L'accélérateur devient alors pulsé et son courant moyen assez faible. C'est le défaut majeur des synchrocyclotrons dont le premier prototype date de 1946. Il existe une machine de ce type à Berkley où des protons de 730 MeV sont produits.

Cyclotron isochrone

L'autre possibilité pour vérifier la condition de synchronisme est de faire augmenter le champ magnétique avec le rayon de la trajectoire de la particule. Le premier cyclotron isochrone date des années 50. L'avantage de ce type de machine est de pouvoir fournir un faisceau continu et d'intensité importante. Cependant du fait que la trajectoire des particules est entièrement contenue dans le dipôle, c'est le coût de l'électroaimant qui donne la limite en énergie.

Synchrotron

Un synchrotron reprend les principes des accélérateurs linéaires et des cyclotrons. La trajectoire des particules y est cependant circulaire. Un synchrotron est constitué de sections droites dans lesquelles les particules sont accélérées et de secteurs avec champ magnétique qui courbent les trajectoires pour globalement donner un cercle. Cependant, d'après ce que nous avons vu précédemment, il faut remplir les deux conditions suivantes:

- L'intensité du champ magnétique doit être augmentée au cours du temps pour maintenir les particules accélérées sur une trajectoire circulaire.
- La fréquence d'accélération doit elle aussi augmenter au cours du temps, car la vitesse des particules sur l'orbite augmente.

Les premières machines de ce type datent du début des années 50. A Brookhaven, en 1952 le cosmotron accélérât des protons à 3 GeV. C'est avec le Bevatron (Synchrotron de Berkley accélérant des protons jusqu'à 6 GeV) que furent observés les premiers anti-protons. Au CERN il existe plusieurs machines de ce type: le PS (28 GeV) et le SPS (450 GeV). Avec ces machines on accélère également des ions plus ou moins lourds.

Collisionneurs

Dans la plupart de accélérateurs décrits précédemment les particules accélérées sont envoyées sur une cible fixe, donc l'énergie disponible dans le centre de masse du système n'est qu'une fraction de l'énergie du faisceau. Mais si on arrive à faire entrer en collision frontale deux particules identiques, la vitesse du centre de masse dans le référentiel du laboratoire est alors nulle, et l'énergie dégagée dans la collision est deux fois celle d'une particule incidente. Ce principe est utilisé dans les collisionneurs. Souvent ces machines sont utilisées pour accélérer une particule et son anti-particule en sens inverse ($p\bar{p}$, e^+e^-). La plupart du temps, les collisionneurs sont en fait des synchrotrons à focalisation forte.

Chapitre 2 Sources de particules

Introduction

La production de particules chargées est la première étape de la réalisation d'un accélérateur. Une bonne source doit avoir un courant intense, ne pas produire de particules indésirables, et être fiable. Une source d'électrons est très facile à produire, puisqu'il suffit de chauffer une cathode pour les en extraire. Les sources d'ions sont en général plus complexes à réaliser et à faire fonctionner car elle sont basées sur l'extraction des ions d'un plasma. Dans ce chapitre, après avoir établi quelques bases théoriques, seront abordés les cas des électrons. Puis une description technique un peu plus précise des sources d'ions sera établie. Pour finir les caractéristiques de deux sources du CERN seront données.

Sources d'électrons

Les sources d'électrons sont très présentes dans notre vie quotidienne, puisque l'on trouve des "canons à électrons" dans tous les téléviseurs et moniteurs d'ordinateur. Le principe utilisé dans ce cas est l'émission thermique. Pour les accélérateurs ce principe est aussi utilisé, mais il existe d'autres méthodes pour obtenir de grandes quantités d'électrons comme l'émission en champ fort ou la photo-émission.

Principe de l'émission thermique

Lorsqu'une surface métallique est chauffée, les électrons libres du milieu gagnent de l'énergie cinétique. Si cette énergie cinétique est supérieure au travail nécessaire pour s'échapper de cette surface et que la composante perpendiculaire à la surface de leur vitesse est non nulle, alors ils pourront s'échapper du métal. Cette énergie cinétique minimum est appelée fonction de travail. L'équation de Richardson-Dushman donne la densité maximum de courant qu'une cathode chauffée peut fournir:

$$J = AT^2 e^{-11600\Phi/T} \quad (15)$$

Φ est la fonction de travail exprimée en eV , A est une constante dont la valeur théorique est de $120 A/cm^2$. En fait cette valeur dépend fortement du matériau de la photocathode, comme le montre le tableau 1. La fonction de travail doit être aussi petite que possible pour obtenir une température de fonctionnement raisonnable de la cathode.

Matériau	A ($A/(cm^2K^2)$)	Φ (eV)	T (K)	J (A/cm^2)
Tungstène	60	4.54	2500	0.3
Thorium	3	2.63	1900	1.16
Tungstène				
Oxydes mélangés	0.01	1.0	1200	1.0
Tantale	60	3.38	2500	2.38
Cs/O/W	0.003	0.72	1000	0.35

Tableau 1: Caractéristiques des principaux matériaux utilisés pour réaliser les cathodes thermiques des canon à électrons.

La technologie des cathodes a beaucoup évolué depuis les années 30, avec notamment l'apparition des cathodes imprégnées. Dans ce cas, au lieu d'utiliser un support de nickel recouvert d'oxyde, on utilise un support poreux en tungstène dans lequel est imprégné un aluminate. Les densités émissives obtenues peuvent alors atteindre 10 A/cm².

Le fonctionnement du canon à électron peut être comparé à celui d'une diode. La densité de courant maximale est limitée par la loi de Child-Langmuir, $J = PV^{3/2}$, dans le cas d'électrons non relativistes où P est la pervéance du canon et dépend de sa géométrie (dans le cas d'électrons relativistes, c'est la loi de Jory-Trivelpiece qui s'applique $J \propto V$). Cette équation traduit le fait que pratiquement le courant maximum extractible est limité par la valeur du champ à la surface de la photocathode. Ce champ est inférieur à celui établi par la différence de potentiel entre anode et cathode du fait du phénomène de charge d'espace des électrons arrachés.

Pour conclure on voit donc que la densité de courant émise par une cathode thermique (appelée aussi cathode thermoionique) est limitée d'abord par la charge d'espace, puis par la température de la cathode, comme le résume la figure 1.

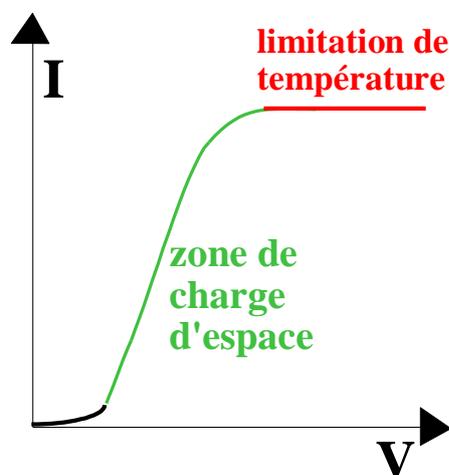


Figure 1: Régimes de fonctionnement des cathodes thermoioniques. Les courants obtenus sont limités dans un premier temps par les phénomènes de charge d'espace (loi de Child Langmuir) puis par la température de la cathode.

Le principal inconvénient de ce type de cathodes est lié au fait que leur brillance intrinsèque est assez limitée. La brillance intrinsèque peut être définie par :

$$B = Cte \times \frac{I}{\epsilon_{ni}^2} \quad (16)$$

où ϵ_{ni} est l'émittance intrinsèque normalisée. En générale, la brillance d'une source thermoionique d'électrons est 50 à 100 fois inférieure à celle d'une photocathode.

Emission en champ fort

L'émission en champ fort s'appuie en fait sur l'effet de pointe observé avec le champ électrique. Lorsque une haute tension est appliquée entre une pointe conductrice et une surface plane perpendiculaire à l'axe, les lignes de champ se resserrent. Un électron peut alors acquérir suffisamment d'énergie pour s'échapper de la pointe. C'est le principe de l'émission de Fowler-Nordheim. Les lignes de champ autour d'une pointe sont représentées schématiquement sur la figure 2.

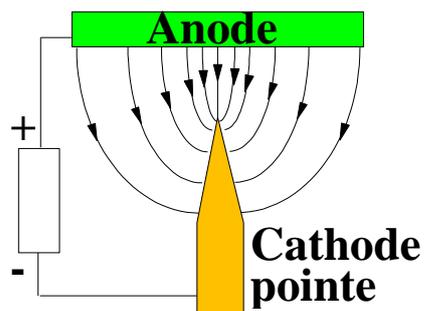
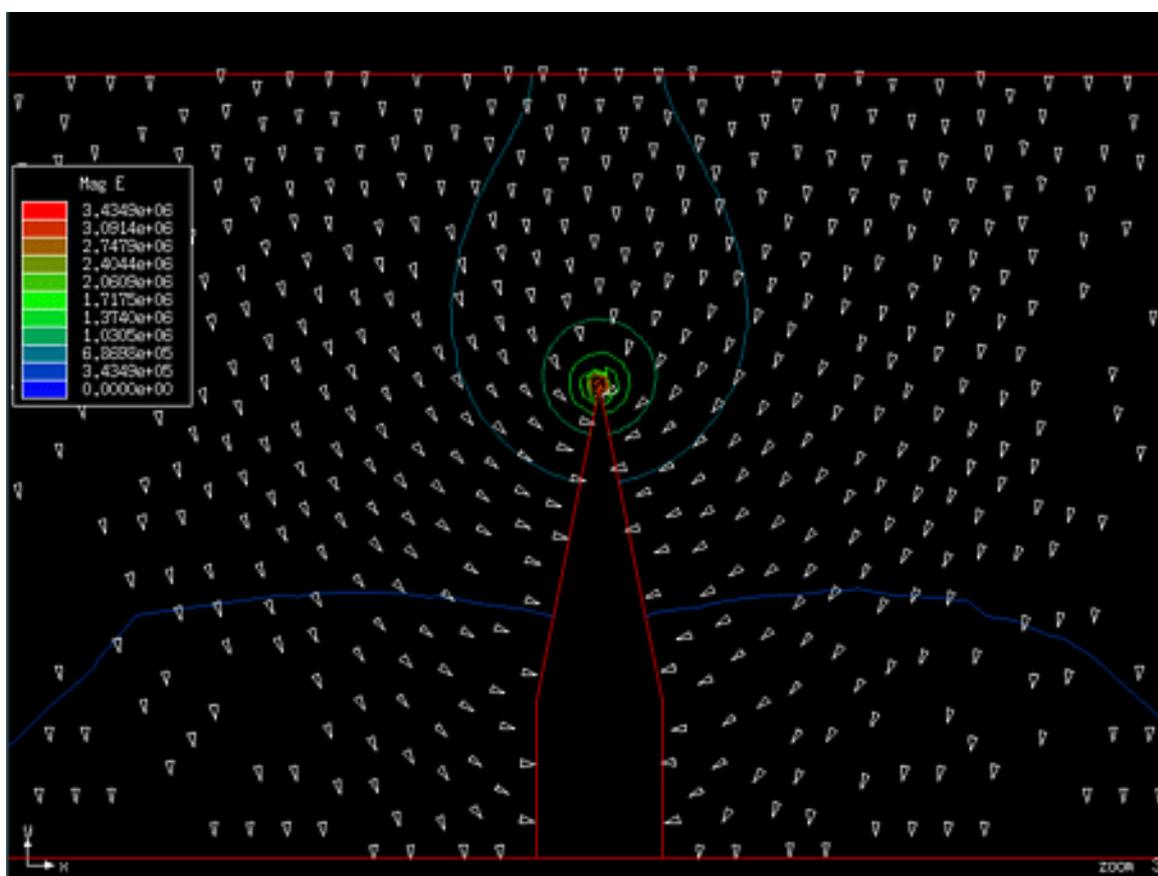


Figure 2: *Shéma de principe de l'effet de pointe.*

La figure 3 montre le résultat d'une simulation par éléments finis du champ électrique créé par une pointe portée à un potentiel de 20 kV et faisant face à une anode plane. La distance entre l'extrémité de la pointe et la plaque d'anode est de 2 cm.



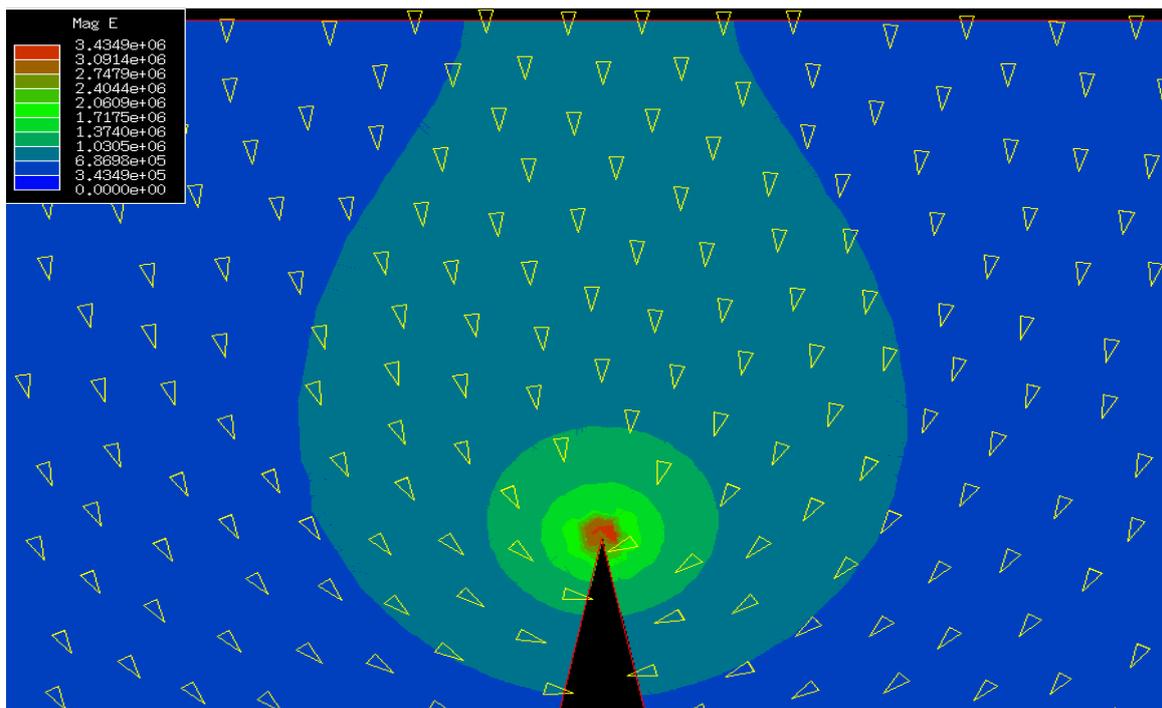


Figure 3 : Simulation des lignes de champ obtenues avec une différence de potentiel de 20 kV entre la cathode pointe et l'anode plane. Les flèches représentent la direction du champ électrique, les lignes de couleur sont des iso-contours de champ.

La densité de courant est approchée par l'équation de Fowler-Nordheim:

$$J = \left(1.54 \cdot 10^{-10} \frac{E^2}{\Phi} \right) \times e^{-6.83 \cdot 10^9 \times \frac{k}{E} \times \Phi^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \quad (17)$$

E est le champ électrique (V/m) appliqué à la pointe, k une constante voisine de 1, et Φ la fonction de travail (eV) du matériau. Avec ce principe et pour des champs voisins de 10 MV/cm, la densité de courant est de 10^{12} A/m² mais le courant très petit car la surface émettrice est faible (pointe). Pour pallier à cet inconvénient il suffit de multiplier le nombre de pointe. Des aiguilles métalliques ou des réseaux de pointes réalisés dans du silicium ont été utilisés avec succès, mais il subsiste des problèmes de destruction des pointes principalement à cause d'échauffements locaux.

Principe de la photo-émission

La photo-émission repose sur le principe de l'effet photoélectrique: des photons arrivant sur un métal peuvent libérer des électrons. Pour cela il faut que l'énergie des photons soit supérieure à la fonction de travail :

$$h\nu \geq \Phi \quad (18)$$

L'énergie cinétique des électrons émis sera alors:

$$E_c = h\nu - \Phi \quad (19)$$

Pour des longueurs d'onde dans le domaine visible l'énergie cinétique des électrons émis est de l'ordre de la dizaine eV. Comme dans le cas des cathodes thermiques, il faut adjoindre aux photocathodes des anodes d'extraction.

Les critères importants des photocathodes sont:

- Le rendement quantique défini par

$$\eta = \frac{n_e}{n_{ph}} \quad (20)$$

- La durée de vie de la cathode défini par le temps qu'elle met à passer d'un rendement quantique η_{\max} à un rendement quantique $\eta_{\max}/2$.

Principalement, il existe trois types de photocathodes:

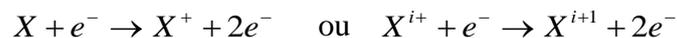
- Alcalines (CsSb, CsKSb) dont les rendements quantiques à 0,5 nm n'excèdent pas 10 %. De plus les durées de vie de ces photocathodes sont faibles.
- Métalliques (Cu, Y, Mg) à très faible rendement quantique.
- Semi-conductrices à faible rendement quantique mais durée vie grande.

Enfin il faut mentionner la photoémission de champ qui utilise des pointes réalisées dans des semi-conducteurs et qui permet d'obtenir de très forts courants d'électrons.

Sources d'ions

Plus l'état de charge des ions sera grand, plus l'accélération sera importante. C'est pour cette raison que l'on cherche souvent à "éplucher" au maximum les ions, c'est à dire retirer le plus grand nombre d'électrons avant de les injecter dans l'accélérateur. La majorité des sources d'ions utilisent d'abord des sources intenses d'électrons pour créer un plasma.

Le processus utilisé consiste à ioniser un gaz par de multiples collisions entre des électrons et les atomes électriquement neutres:



L'énergie cinétique des électrons primaires doit être supérieure à l'énergie d'ionisation des atomes du gaz. La figure 4 représente les énergies d'ionisation de différents atomes à différents états d'ionisation. Les électrons des couches les plus profondes sont ceux qui sont le plus fortement liés au noyau.

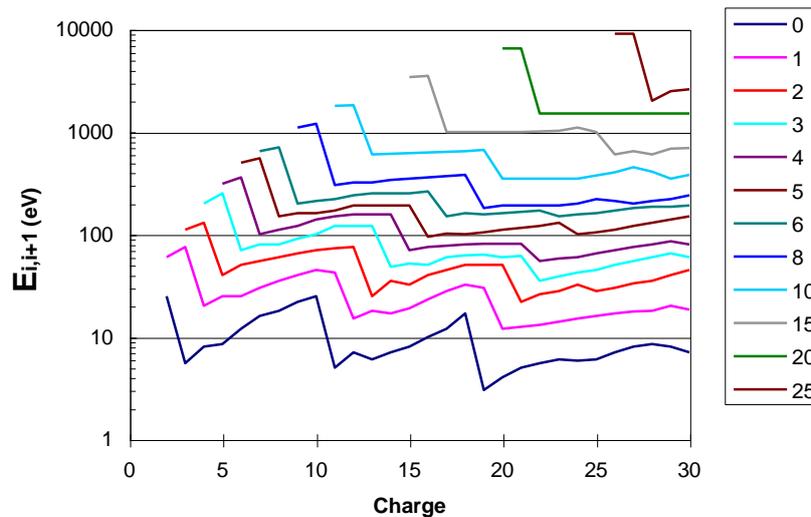


Figure 4: Energie d'ionisation en fonction de la charge du noyau pour différents états d'ionisation.

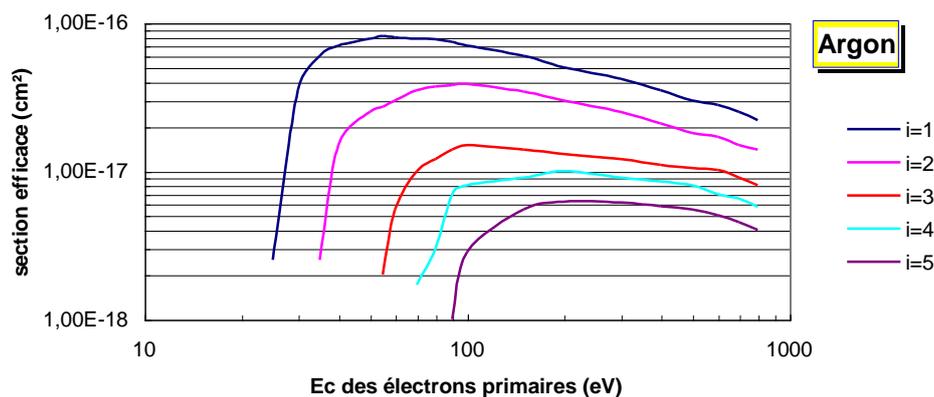


Figure 5: Section efficace d'ionisation de l'Argon en fonction de l'énergie cinétique des électrons primaires. Les courbes représentent les différents états d'ionisation de l'argon.

De plus, la section efficace d'ionisation d'un atome par bombardement d'électrons passe par un maximum lorsque l'énergie des électrons primaires est d'environ trois fois le potentiel d'ionisation. Enfin, cette section efficace d'ionisation est d'autant plus faible que l'état de charge de l'ion est grand (Figure 5).

En résumé, il faut 10 à 40 eV pour ioniser une fois un atome, quelque centaines d'eV pour arracher une charge à un ion peu "épluché", et plusieurs dizaines de keV pour ioniser un ion fortement chargé.

Pratiquement, un champ magnétique assure le confinement du plasma et permet d'augmenter le nombre de collisions par augmentation du parcours des électrons. Une configuration adéquate du champ électrique permet d'extraire les ions positifs et de les envoyer dans l'accélérateur.

Il existe plusieurs types de sources d'ions, que l'on classe suivant leur utilisation:

- Les sources à filament
- Les plasmatrons et duoplasmatrons servent de source de protons, deutons, et parfois de particules alpha.
- Les Magnétrons et sources PIG pour les ions légers.
- Les sources à faisceau d'électrons (EBIS)
- Les sources ECR pour les ions lourds fortement épluchés

Sources à filaments

Une simple décharge entre deux électrodes peut aussi ioniser un gaz. Dans ces sources, un filament chauffé est placé au centre d'une anode cylindrique ou cubique.

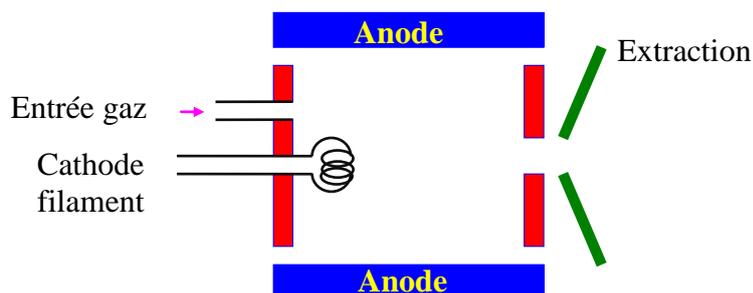


Figure 6: Principe d'une source à filament.

Pour rendre le flux d'ion produit plus facilement contrôlable, ces sources sont souvent entourées d'une série d'aimants. Cette méthode permet d'obtenir des ions chargés une fois et des courants inférieurs à 100 mA. Le principal inconvénient de ces sources vient du fait que le filament est fragile (il est placé dans l'enceinte où a lieu la décharge). De plus, la pression de gaz dans l'enceinte étant de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-3} torr il y a de nombreuses recombinaisons des ions avec les électrons du plasma.

Plasmatron et Duoplasmatron

Un paramètre important d'une source est le courant extrait. Bien évidemment ce courant dépend fortement de la densité d'ions du plasma. Dans l'unoplasmatron, le plasma est comprimé au voisinage de l'anode à l'aide d'un champ électrique. Cela permet également d'augmenter l'énergie des électrons primaires. La figure 7 montre le potentiel en différents points d'un plasmatron.

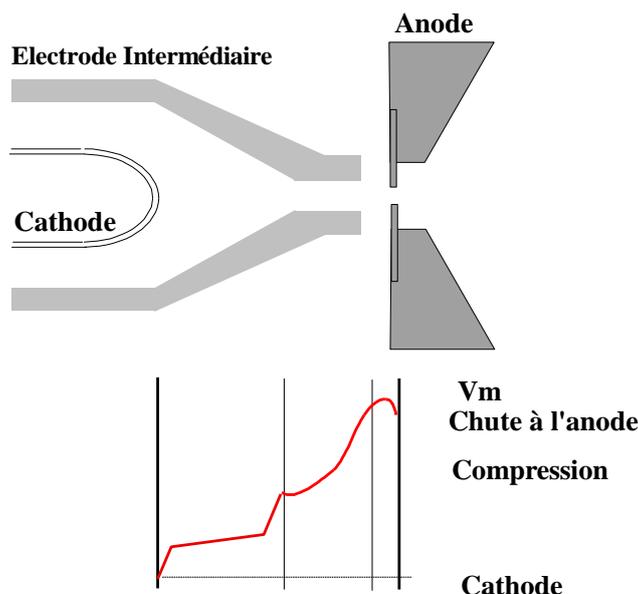


Figure 7: Schéma de principe du plasmatron.

Il est également possible d'avoir une compression supplémentaire en utilisant un champ magnétique axial autour de l'anode, ce qui permet de très fortement focaliser les trajectoires des électrons primaires sur le plasma. C'est le principe des duoplasmatrons. Cependant, dans ces sources le plasma est tellement dense, qu'il est difficile d'en extraire un faisceau de bonne qualité. Une enceinte de décompression est alors utilisée avant injection dans l'accélérateur. Une coupe du duoplasmatron du CERN est présentée sur la figure 8. L'enceinte de décompression est dans ce cas constituée d'un cylindre polarisé placé juste après un aimant d'expansion. Cette source est utilisée principalement pour produire un faisceau de proton pouvant atteindre 500 mA. Elle a également produit des deutons et des alphas. Cependant la faible énergie des électrons primaires et leur mauvais confinement limite les plasmatrons à de faibles états de charge.

Magnétron et Source Penning

Avec les magnétrons et les sources Penning des états de charge de l'ordre de +10 sont couramment obtenus.

Magnétron

Les magnétrons sont à l'origine des tubes générateurs Hyperfréquences de quelques MégaWatt de puissance pulsée pour des fréquences de 1 à 100 GHz. Un magnétron est en fait une diode (tube) circulaire placée dans un champ magnétique axial. Les électrons émis par la cathode sont "piégés" par le champ magnétique et ne peuvent atteindre l'anode. Ils forment alors un nuage de charge d'espace qui tourne autour de la cathode. Ce nuage est d'autant plus proche de la cathode que la valeur du champ magnétique est grande. Le principe de ces dispositifs a été adapté pour être utilisé comme source d'ions. Dans ce cas, une anode cylindrique est placée à l'intérieur d'un solénoïde qui crée le champ magnétique (Figure 9). Les électrons émis par la cathode ionisent le gaz présent dans l'enceinte et l'extraction des ions est axiale.

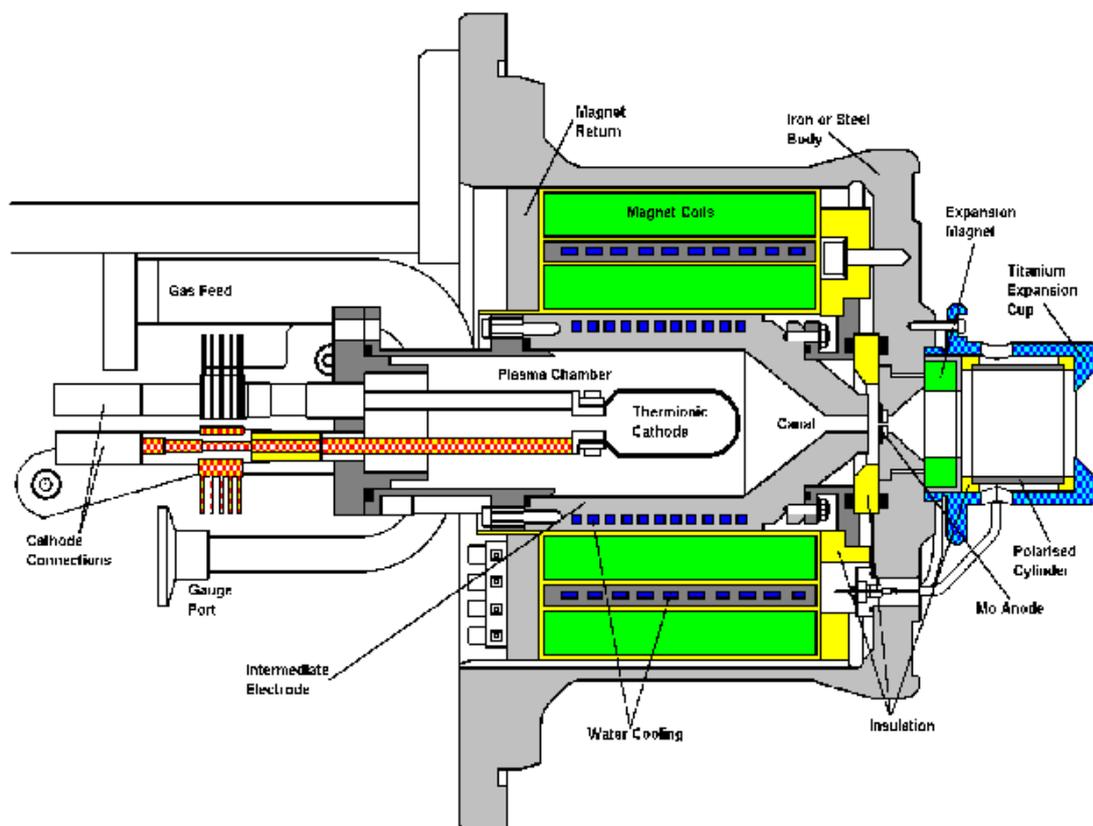


Figure 8 : Schéma de principe de la source duoplasmatron utilisée comme injecteur de proton dans le LINAC2 du complexe PS au CERN

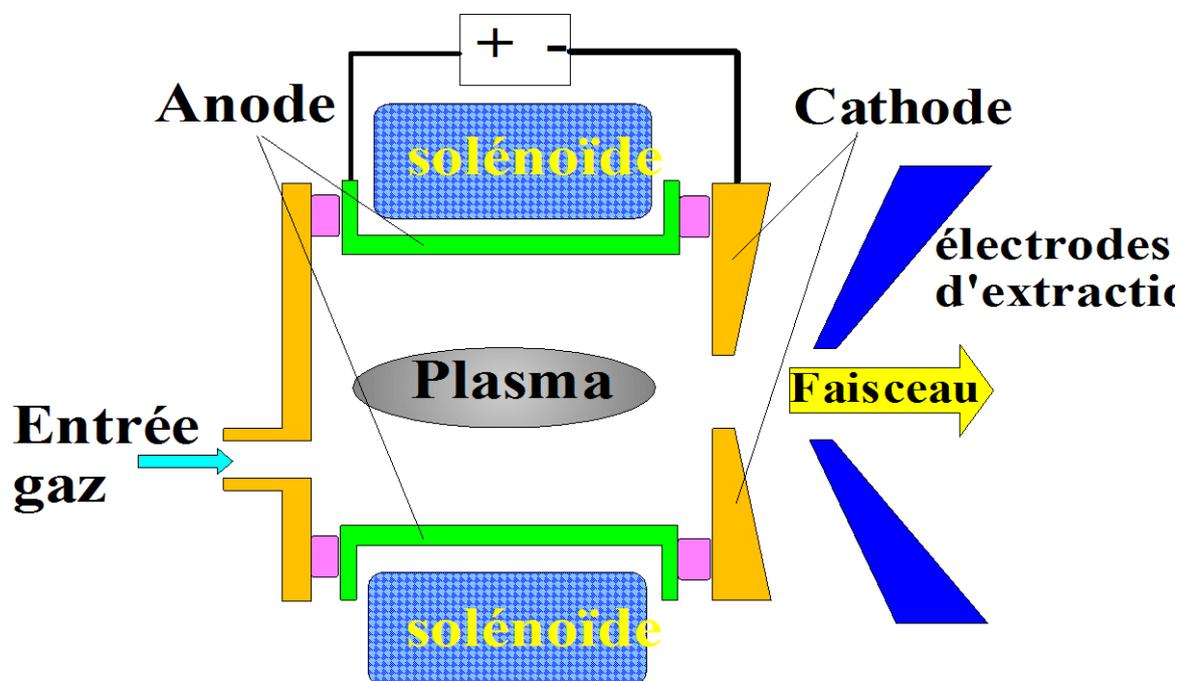


Figure 9 : Source fonctionnant sur le principe des magnétrons. Le champ magnétique est généré par un solénoïde et le faisceau d'ions est axial.

Source Penning (PIG)

Une source PIG est constituée de deux cathodes recouvertes d'oxyde. Ces cathodes sont disposées aux extrémités d'une anode de symétrie cylindrique. L'ensemble est placé entre les deux pôles d'un aimant. Les électrons sont produits le plus souvent par chauffage d'une cathode. Ils sont accélérés par la différence de potentiel entre anode et cathode, mais du fait de la présence du champ magnétique, ils ont une trajectoire cycloïdale ce qui augmente leur parcours et donc la probabilité d'ionisation du gaz présent dans l'anode. De plus, du fait de la présence de la deuxième cathode, les électrons sont réfléchis et parcourent donc plusieurs allers-retours. Cependant, les électrons perdent peu à peu de l'énergie mais du fait du champ magnétique restent confinés autour de l'axe. L'extraction des ions présents dans le plasma est obtenue au moyen d'une fente réalisée dans l'anode. En regard de cette fente est placée une électrode d'extraction (figure 10). Les ions produits sont de plus analysés et triés par le champ magnétique de la source. Ce type de source est très fiable et produit des ions légers jusqu'au néon.

Les courants obtenus pour des états de charge compris entre +7 et +10 sont 100 fois supérieurs à ceux obtenus avec les plasmatron. Au GSI une source de ce type arrive même à produire des courants de 50 à 100 μA d'ions Au, Bi ou U chargés 9 ou 10 fois.

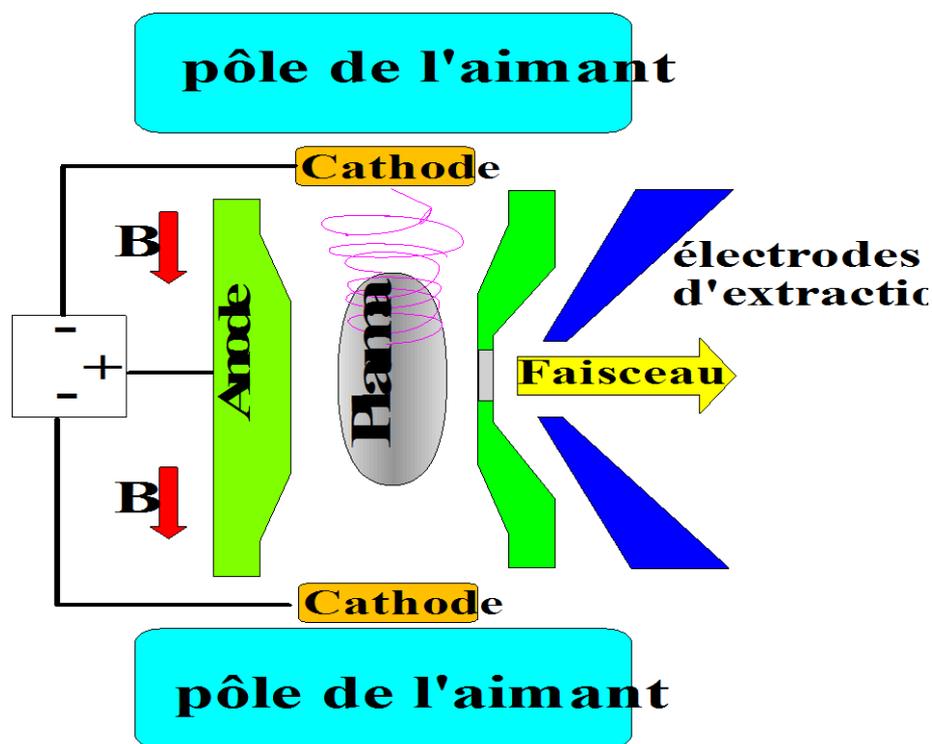


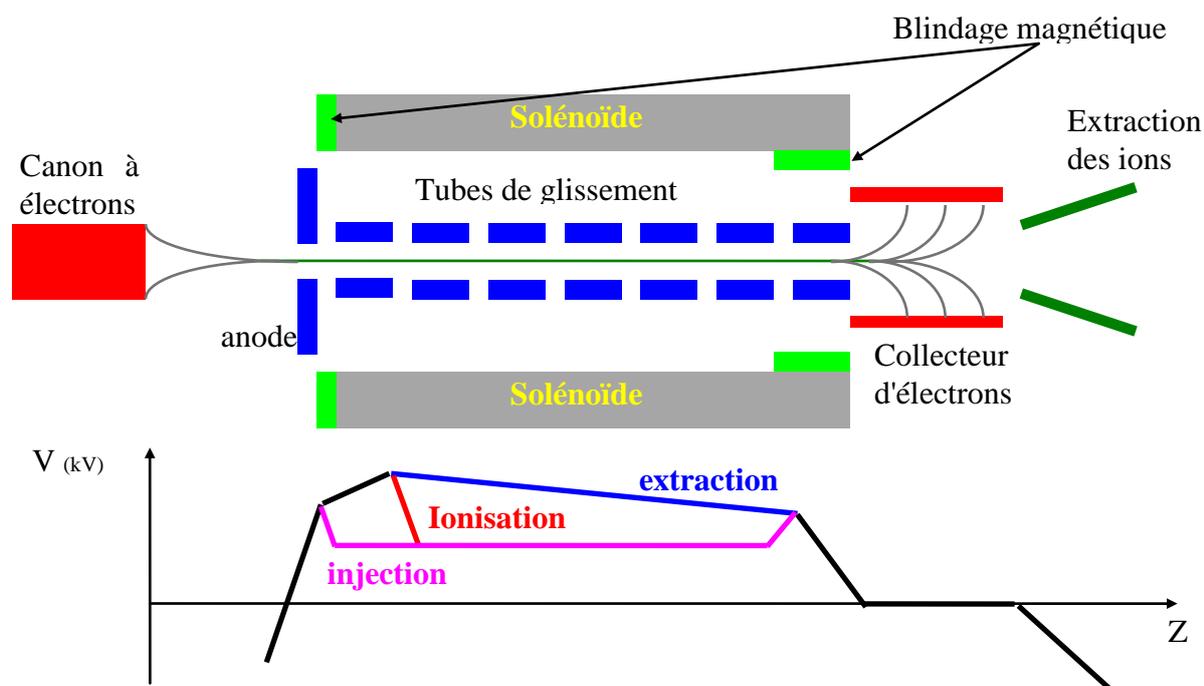
Figure 10: Schéma de principe d'une source Penning Ionisation Gauge.

Source "Electron Beam Ion Source" (EBIS)

Une source EBIS est constituée d'un canon à électrons visant le centre d'un solénoïde. Le faisceau d'électrons va ioniser les atomes du gaz présent au centre du solénoïde puis sera collecté à sa sortie par des électrodes. Le potentiel le long de l'axe est contrôlé par des tubes de glissement cylindriques.

Les ions produits sont contenus transversalement par le puits de potentiel du champ électrostatique des électrons du faisceau et longitudinalement par des miroirs électrostatiques (une anode placée près du canon et les tubes de glissement). Ces sources fonctionnent en trois temps :

- "Injection" les ions très faiblement chargés sont accumulés dans le puits.
- "Ionisation" par le faisceau d'électrons. En augmentant le potentiel des premières anodes les ions sont piégés et ils peuvent être ionisés par le faisceau d'électrons.
- "Extraction".



Le principal inconvénient de ces sources est l'instabilité qui résulte des interactions des ions avec le faisceau d'électrons.

Source "Electron Cyclotron Resonance" (ECR)

Dans un champ magnétique, des électrons ayant une vitesse non nulle tournent à la fréquence:

$$\nu = 28 \text{ B GHz/Tesla}$$

c'est la fréquence cyclotron des électrons. Si un champ électrique variable est appliqué, la condition de résonance cyclotron est vérifiée quand la fréquence du champ est égale à la fréquence cyclotron, c'est à dire 28 B GHz/Tesla. Ce procédé de résonance est très efficace pour transférer l'énergie électromagnétique aux électrons, qui peuvent alors ioniser les atomes de gaz. La figure montre le temps mis par les électrons pour atteindre 100 KeV par cette méthode. Dans une source ECR, un champ magnétique compris entre 0.5 et 0.2 Tesla est créé à l'intérieur de l'enceinte et une onde électromagnétique proche de la fréquence cyclotron est générée. Les électrons du plasma tournant à la fréquence cyclotron vont alors entrer en résonance et gagner de l'énergie à chaque tour. Par exemple, avec un champ magnétique de 0.36 tesla, la fréquence de révolution est de 10 GHz et la puissance radiofréquence à fournir correspond alors à des micro-ondes ($\lambda=3\text{cm}$). Les températures et les densités de plasma atteintes sont alors très élevées. Des bobines de Helmutz assurent le confinement longitudinal du plasma, tandis que le confinement radial est obtenu par un puissant aimant multi-pôles.

Ces sources sont assez volumineuses (diamètre de l'ordre du mètre), nécessitent des champs plus importants que celles vues précédemment (>0.2 tesla) et sont assez gourmandes en énergie. Cependant, avec ce type de source des ions légers complètement épluchés (C, N, O et néon) ainsi que des ions très lourds et fortement épluchés sont obtenus (Au^{25+} , Bi^{25+} , U^{25+} et Pb^{28+}) avec des courants dépassant la centaine de μA . Les sources ECR sont maintenant utilisées dans tous les accélérateurs d'ions lourds.

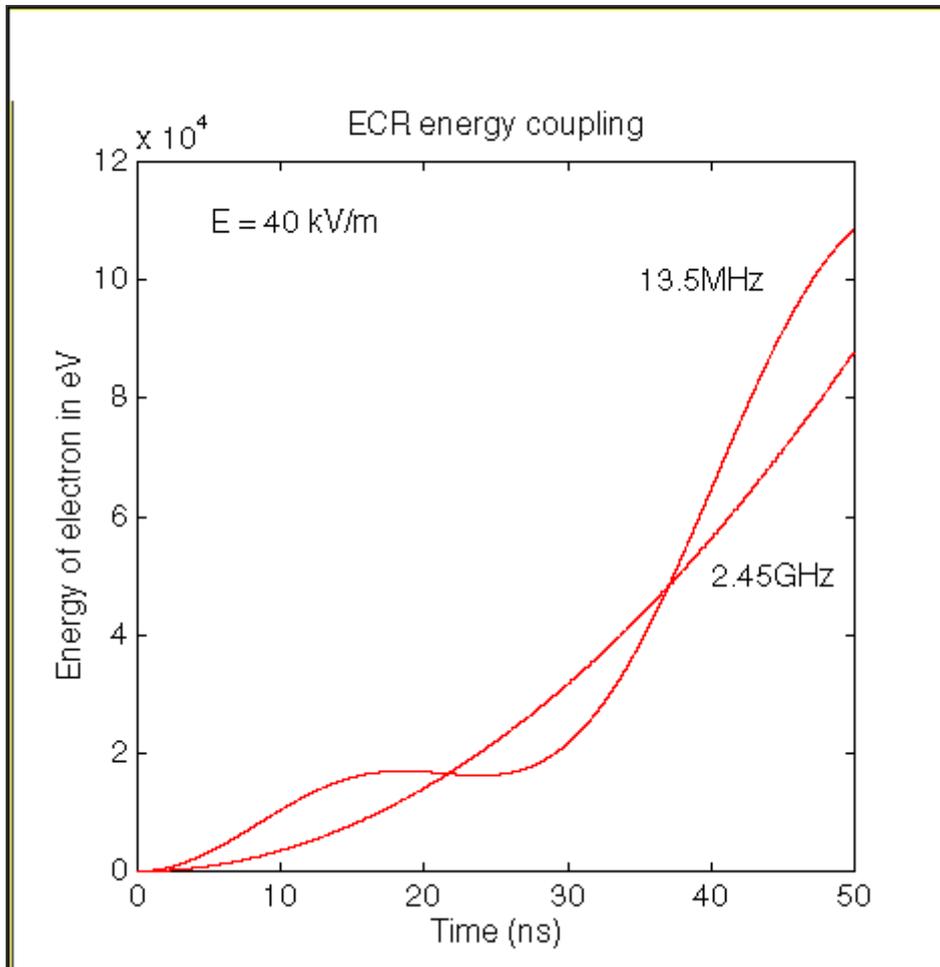


Figure 11 : *Energie en fonction du temps pour des électrons accélérés par micro-ondes à la fréquence cyclotron.*

La figure 12 représente la coupe de la source ECR4 développée au GANIL et utilisée au SPS du CERN.

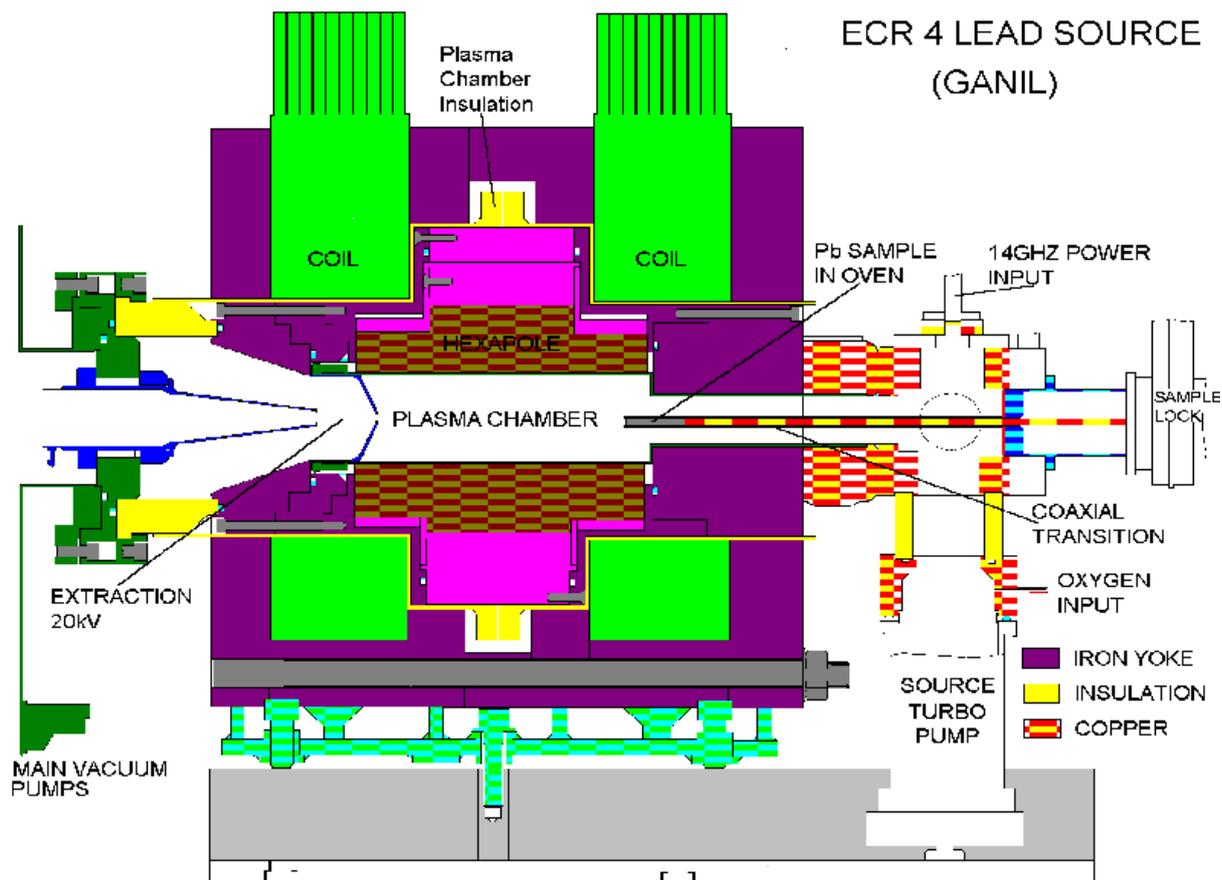


Figure 12: Schéma de la source ECR utilisée au CERN pour produire des ions lourds.

Grandeurs caractéristiques des sources

(Extrait de la page WEB des sources en fonction au CERN)

Sources de Protons

Le tableau résume les caractéristiques de la source de proton duoplasmatron utilisée au PS du CERN.

Type	Duoplasmatron with biased electrode in expansion cup
Source	Body Iron or mild steel acting as magnetic flux path
Intermediate electrode	Iron, water cooled. Forms cathode plasma chamber
I.E. Canal	5 mm. diameter, 12 mm. long
Cathode	Mixed oxide thermionic, hairpin, 16 mm. by 92 mm.
Heating current	50 A (150 W) via arc isolating transformer
Hydrogen flow	6 atm.cc/min (0.076 Torr.l/s)
Plasma chamber pressure	0.7 - 2 Torr (estimated)
Main (compression magnet)	2 layer, water cooled, 10A (8750 A.T), iron return
Anode	1 mm. molybdenum in iron insert
Anode	hole 0.6 mm
Arc supply	Thyristor triggered delay line connected to cathode
Arc voltage	500 - 1000 V ignition, 80 V during discharge
Arc current	50 - 60 A pulsed
Pulse length	20 - 150 us (by crowbar of delay line, user defined)
Repetition rate	1 Hz
Expansion magnet	Encapsulated, Kapton/BN3/epoxy insulated (600 A.T)
Expansion cup	Titanium with pseudo-Pierce angle, 20 mm. aperture
Polarised electrode	Stainless steel held at -40 V wrt. expansion cup
Extraction	By acceleration field, accel - decel
Extraction potential	92 kV (- 3kV on decel electrode)
Extraction gap	16.5 mm
Beam current 250 - 320 mA	250 - 320 mA

Tableau 2

Sources d'ions

Le tableau résume les caractéristiques de la source d'ions ECR4 en service au CERN.

Type	Electron Cyclotron Resonan
------	----------------------------

Frequency	14.5 GHz
Resonance field	0.52 Tesla
Plasma chamber	Water cooled stainless ste
Dimensions	66 mm. diameter, 179 mm. long
Plasma electrode aperture	16 mm
Cutoff plasma density	$2.4 \cdot 10^{12} / \text{cm}^3$
Longitudinal Confinement	Minimum B, mirror, 2 water cooled coils
Peak axial field	1.1 Tesla
Mirror ratio	2.2
Coil current	typically 1100 A
Radial confinement	NdFeB permanent magnet hexapole
Pole tip field	1.2 T but with longitudinal gradient
RF power	2 kW max.
RF power source	Klystron amplifier
Power injection	Tuned waveguide to co-axial transition
Operation mode	Pulsed, optimised for "afterglow"
Sample feed	Gaseous, by injection through co-ax Metallic, by micro-over or plasma heating
Plasma Gas	Oxygen
Heating pulse length	50 ms
Useful beam length	approximately 1 ms.
Repetition rate	10 (5) Hz
Extraction	By acceleration field, one gap
Extraction potential	2.5 keV/nucleon (nominal)
Extraction gap	42 mm.
Beam currents	Total 2 -3 mA (typically) Analysed, >100microA Pb27+

Tableau 3

Chapitre 3 Accélérateurs à tension continue

Introduction

C'est en fait en 1928, que l'ère des accélérateurs de particules commença. En effet, Gamov venait de montrer que par effet tunnel, 500 KeV devait suffire pour induire une réaction nucléaire. Rutherford pensa que la technologie de l'époque permettrait de le faire et il demanda alors à Cockcroft et Walton de construire une telle machine. L'objectif fut atteint en 1932 avec un générateur capable d'atteindre 700 KV. L'expérience leurs montra que des protons de 400 KeV produits par leur machines permettaient de casser le lithium. Ce type de machine fut très utilisé comme injecteur pour de grands accélérateurs car il permet d'obtenir des courants importants.

A la même époque, aux Etats Unis, Van de Graaff inventait un générateur électrostatique pour la recherche en physique nucléaire. Il construisit alors son premier générateur à Princeton et atteignit le potentiel de 1,5 MV. Mais il rencontra des difficultés, notamment avec la colonne d'accélération, ce qui explique que ce type d'accélérateur ne fut utilisé dans la recherche que quelques années plus tard. En 1951 Alvarez proposa une amélioration de l'accélérateur Van de Graaff qui utilisait toujours une courroie mais comportait deux colonnes d'accélération (d'où le nom Tandem Van de Graaff) placées dans une enceinte remplie d'Azote ou de Fréon sous pression (8 à 10 atm).

Avant d'aborder la description de ces machines, étudions les paramètres importants des accélérateurs électrostatiques.

Courant débité et énergie

Idéalement un accélérateur électrostatique peut être considéré comme un tube isolant dans lequel circule un courant du fait de la différence de potentiel importante appliquée entre ces extrémités. En fait, il faut tenir compte de la résistance interne du générateur HT, ainsi que des courants parasites qui circulent entre les extrémités du tube.

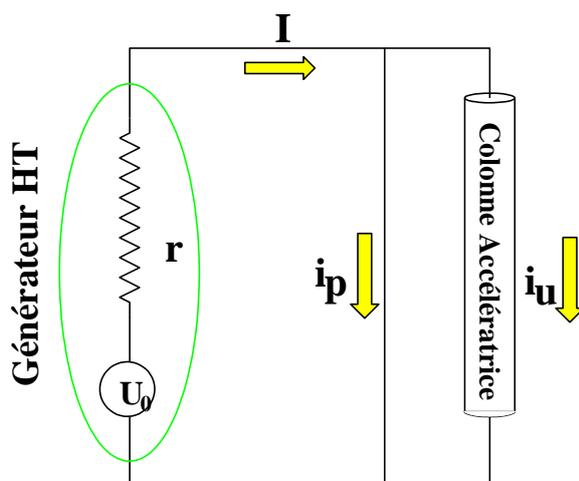


Figure 13: Schéma électrique simplifié des accélérateurs électrostatiques.

La tension disponible aux bornes de la colonne d'accélération s'écrit:

$$U = U_0 - r(i_u + i_p) \quad (21)$$

et le courant utile d'ions, i_u , à pour expression:

$$i_u = \frac{1}{r}(U_0 - U) - i_p \quad (22)$$

En fait le courant parasite i_p est fonction de la tension aux bornes de la colonne. Ce courant est principalement la somme de trois effets. Le premier est du aux ions perdus lors de l'accélération et qui viennent heurter les parois de la colonne isolante ou les atomes du gaz résiduel. Ces ions arrachent alors des électrons secondaires qui vont remonter vers la source. Le deuxième est consécutif à l'effet corona (dans un champ électrique non uniforme une ionisation peut se produire, sans qu'il y ai décharge disruptive, qui se manifeste souvent par une lueur entourant les électrodes). Enfin, il existe un courant parasite dans la chaîne de résistance des plateaux équipotentiels.

La figure 14 montre l'évolution du courant d'ions en fonction de la haute tension. Lorsque la tension d'accélération est très petite le courant est maximum. Mais dans ce cas les particules ne sont pas accélérées. Lorsque la tension s'approche de la tension de claquage, le courant d'ion i_u

chute rapidement à cause de la très forte augmentation des courants corona. Pratiquement, lorsque la haute tension est proche de la valeur limite, donc que les ions sont proches de l'énergie maximum, l'intensité du faisceau ne dépasse pas quelques dizaines de μA dans les Van de Graaff.

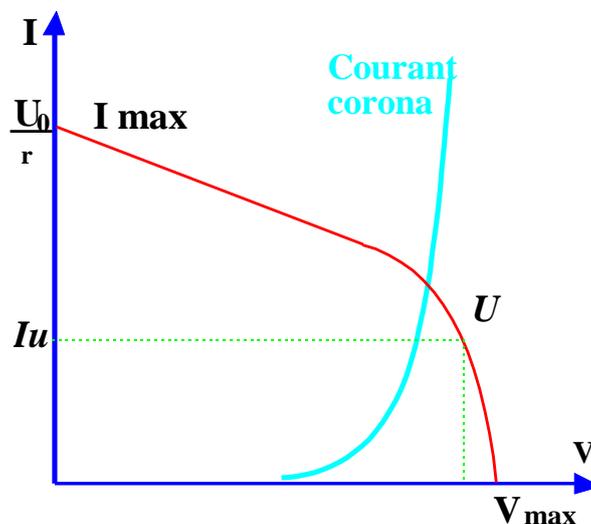


Figure 14

La régulation en énergie est souvent mesurée par un dispositif analyseur de vitesse. A la sortie de la colonne, un électroaimant crée un champ magnétique uniforme, perpendiculairement à l'axe du champ électrique accélérateur(Figure 15). Un système de fentes isolées est placé à la sortie du champ magnétique. L'impulsion p des ions est déterminée à partir de la relation:

$$p = \frac{q}{\theta} \int B ds \quad (23)$$

θ est mesuré par la position des fentes et B est déterminé grâce à l'électroaimant. Souvent les charges induites sur les fentes servent à asservir le système de régulation de tension de l'accélérateur.

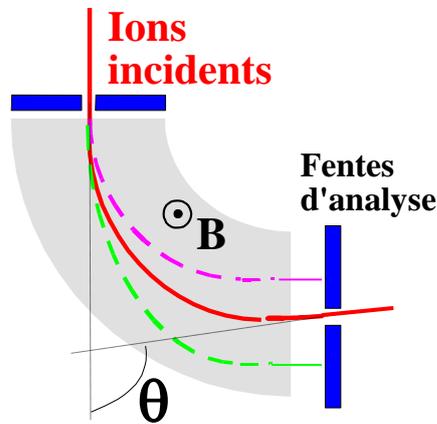


Figure 15: Principe des systèmes d'asservissement en énergie des accélérateurs, utilisant l'analyse magnétique.

Contraintes des accélérateurs électrostatiques

Du fait des hautes tensions générées, les accélérateurs électrostatiques sont soumis à des phénomènes de claquage qu'il faut maîtriser. Les décharges sont minimisées par un dessin approprié de la colonne d'accélération et l'utilisation d'huile ou de gaz pour s'affranchir des problèmes d'isolement.

La colonne d'accélération doit aussi assurer la focalisation des particules. En général, les colonnes sont constituées d'une succession d'électrodes portées à des potentiels croissants séparées les unes des autres par des cylindres isolants. Cette disposition permet d'uniformiser le champ accélérateur et d'éviter les claquages. De plus, pour éviter les collisions entre particules accélérées et gaz, un vide poussé doit être réalisé à l'intérieur de la colonne.

Les problèmes d'isolement concernent aussi la partie externe de la colonne, car les courants de fuite qui s'y propagent peuvent aussi provoquer des claquages. Une attention particulière est donc portée sur la nature des matériaux utilisés et leur état de surface, ainsi que sur les gaz entourant la colonne. La loi de Paschen, qui décrit l'évolution de la tension disruptive des gaz en fonction de la pression p , permet de déterminer les conditions nominales de fonctionnement. Cette loi considère la tension appliquée entre deux plaques parallèles infinies séparées par une distance d . A basse pression la densité du gaz est faible et par conséquent la probabilité d'ioniser les atomes est petite. Dans ce cas la tension disruptive est élevée (typiquement pour l'hélium la tension disruptive est de 4000 V lorsque le produit pd est égal à $0,2 \text{ mmHg} \times \text{cm}$). A haute pression, le libre parcours moyen des électrons est faible et donc il faut une tension élevée pour provoquer une décharge. Entre ces deux extrêmes, la tension disruptive passe par un minimum. En fonctionnement, il faut s'éloigner de ce minimum. Souvent on utilise l'azote, le gaz carbonique (CO₂) ou un mélange des deux (80% / 20%) sous pression. L'hexafluorure de soufre (SF₆) est aussi utilisé mais il présente l'inconvénient d'être cher. L'air est rejeté car lors de décharges il y a formation d'ozone qui est très corrosif.

Accélérateur Cockcroft-Walton

Le principe du générateur de hautes tensions utilisé par Cockcroft-Walton est représenté sur la figure 16.

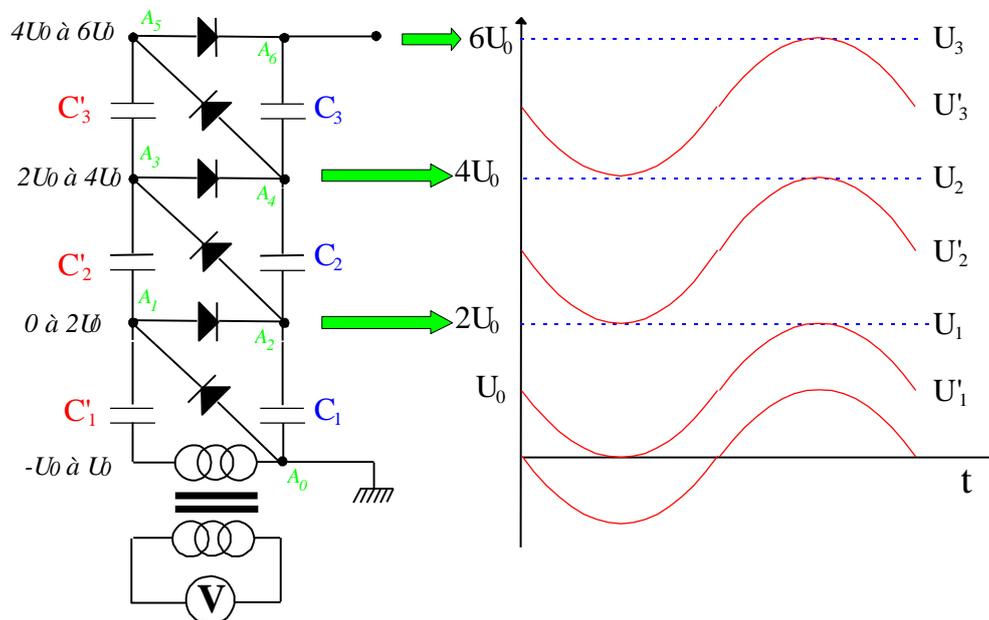


Figure 16: Schéma de principe du générateur HT utilisé par Cockcroft et Walton. La tension alternative délivrée par le transformateur varie entre $-U_0$ et U_0 . La tension de sortie de ce dispositif qui comporte 3 étages est de $6 U_0$.

Le point A_0 est relié à la masse. Lorsque la tension délivrée par le transformateur est comprise entre 0 et $-U_0$, la première diode est passante et le premier condensateur C_1 se charge à U_0 . Lorsque la tension aux bornes du transformateur redevient positive, la première diode est bloquante et la tension entre A_0 et A_1 est comprise entre U_0 et $2U_0$. La deuxième diode est alors passante et charge la capacité C_1 à $2U_0$. Le raisonnement se répète alors de proche en proche, le point A_1 ayant alors un potentiel constant de $2U_0$.

En fonctionnement, le courant débité est non nul et les condensateurs se déchargent partiellement. Les calculs montrent que la tension disponible pour accélérer les particules s'écrit:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{C}} th\left(n\sqrt{\frac{C_s}{c}} \cos\theta_1\right) - \left(\frac{n^3}{12} + \frac{3n^2}{16}\right) \frac{I}{fC} \quad (24)$$

avec:

- n le nombre d'étage
- C_s la capacité parasite par étage (quelques pF)
- C la capacité par étage
- I le courant débité
- $\cos\theta_1$ est l'efficacité des redresseurs ($\theta_1 = 0$ avec des diodes silicium, mais à l'époque de Cockcroft et Walton les redresseurs étaient des tubes)
- f est la fréquence de la tension du transformateur

Il est donc souhaitable de limiter le nombre d'étages et de travailler avec une fréquence assez élevée. Les ondulations résiduelles sont souvent limitées par l'utilisation d'un filtre RC placé entre le générateur et la colonne accélératrice.

Actuellement, les accélérateurs Cockcroft-Walton seuls ne sont plus utilisés en recherche. Ils servent principalement d'injecteur d'ions pour des machines plus puissantes, du fait de leur capacité à délivrer des courants de l'ordre de 200 mA et de leur très grande fiabilité. Cependant, des dispositifs très compacts de ce type, capables de fournir des courants continus de 1 à 5 mA sous une tension de quelques MV sont souvent utilisés dans l'industrie (générateur de neutron, microscope électronique).

Accélérateur Van de Graaff

La figure 17 montre le principe de fonctionnement d'un accélérateur Van de Graaff.

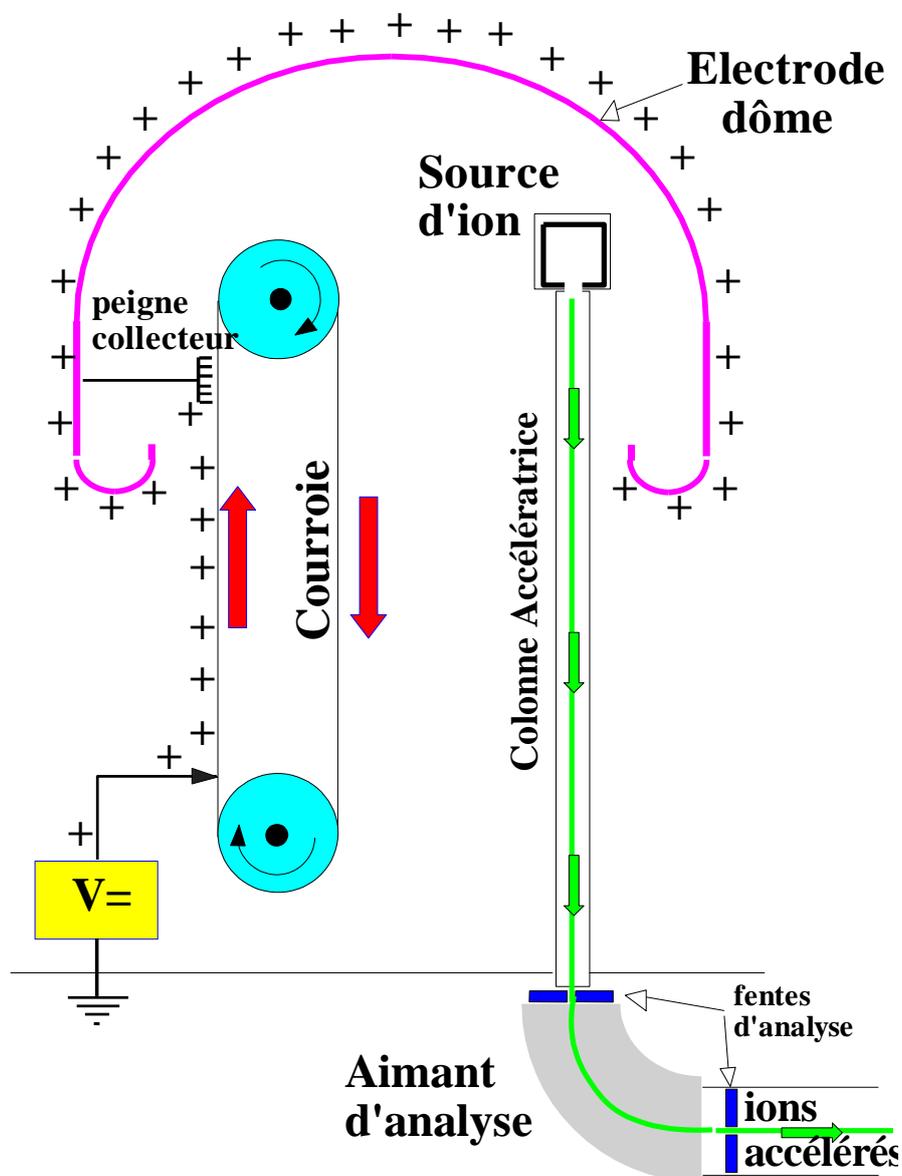


Figure 17: Schéma de principe d'un accélérateur Van de Graaff.

La haute tension accélératrice est obtenue par accumulation de charges transportées par une courroie circulant entre deux poulies électriquement isolées. L'électrode métallique inférieure, portée à un potentiel de quelques dizaines de kV, fait face à la courroie isolante. Une ionisation se produit et les charges positives ainsi générées sont transportées par la courroie en translation jusqu'à un peigne métallique. Ce peigne, relié à une électrode en forme de dôme pour éviter les claquages, collecte les charges positives de la courroie par effet corona.

Le bilan du courant transporté par la courroie est:

$$I = \sigma \cdot \ell \cdot v \quad (25)$$

ℓ est la largeur de la courroie, v sa vitesse linéaire et σ la densité superficielle de charge. Par exemple, dans l'air sous une pression de 10 atmosphères si on a $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cb/m}^2$ (ce qui correspond à un champ de 11 MV/m) le courant transporté par une courroie large de 50 cm se déplaçant à 20 m/s sera de 2 mA. Lorsque l'accélérateur fonctionne ce courant doit compenser le courant du faisceau (courant utile) mais aussi le courant dans le pont de résistances alimentant les électrodes d'uniformisation du champ dans la colonne, et les diverses pertes. L'intensité du faisceau fourni aux utilisateurs est donc largement inférieure au mA, et se situe plus couramment dans la dizaine de μA .

Tandem Van de Graaff

Le principe des accélérateurs tandem est assez astucieux. Il consiste à jouer sur la charge des particules pour les accélérer en deux étapes grâce à deux colonnes portées à une même haute tension. Une source crée des ions positifs, auxquels très rapidement des électrons sont ajoutés. Les ions devenus négatifs, sont alors envoyés dans la première colonne d'accélération dont l'extrémité est portée à une haute tension positive. Au centre, de l'électrode centrale, les ions négatifs sont "épluchés" (c'est à dire que des électrons sont arrachés) lors de leur passage au travers d'une feuille mince de métal. Redevenus positifs, les ions sont repoussés par l'électrode centrale et de nouveau accélérés dans la deuxième colonne. L'ensemble des deux colonnes et la courroie sont généralement enfermés dans une enceinte remplie de gaz sous pression (8 à 10 atm de N_2 , CO_2 ou SF_6) ce qui rend la maintenance difficile.

Les avantages des accélérateurs Van de Graaf de type tandem résident principalement dans le fait que l'énergie atteinte par les ions accélérés est grande et comparable à celle obtenue avec des cyclotrons. De plus, comparées aux Van de Graaff classiques, les sources d'ions sont au potentiel de la terre, ce qui facilite beaucoup leur développement. Cependant, les courants obtenus dans les tandems sont assez faibles, car le rendement de "l'habillage-épluchage" des ions est faible.

Il existe plusieurs machines de ce type en fonctionnement dans le monde. Le Nuclear Structure Facility, à Daresbury en Grande-Bretagne atteint une tension de 20 MV. L'enceinte de 40 m de haut contient du SF_6 sous 8 atm. En France le Vivitron, installé à Strasbourg, est disposé horizontalement. Conçu pour atteindre 35 MV, la machine n'a pu fonctionner qu'à 19 MV depuis sa mise en service en 1993. L'enceinte ou "tank" mesure 50 m de long et contient 60 t de SF_6 . L'accumulation de charge se fait grâce à une courroie qui va d'un bout à l'autre du tank (généralement les courroies des tandems ne font que la moitié de la longueur). Les intensités de faisceau obtenues avec cette machine vont de 1 à 50 nA avec une énergie stable à $\pm 6 \cdot 10^{-5}$. La figure 18 montre l'implantation du Vivitron et son principe de fonctionnement.

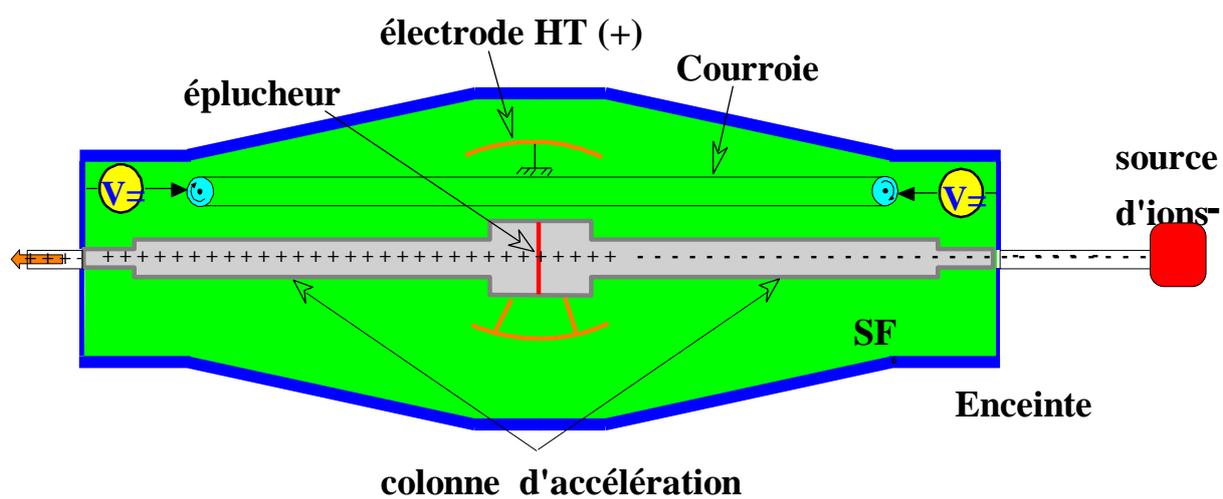
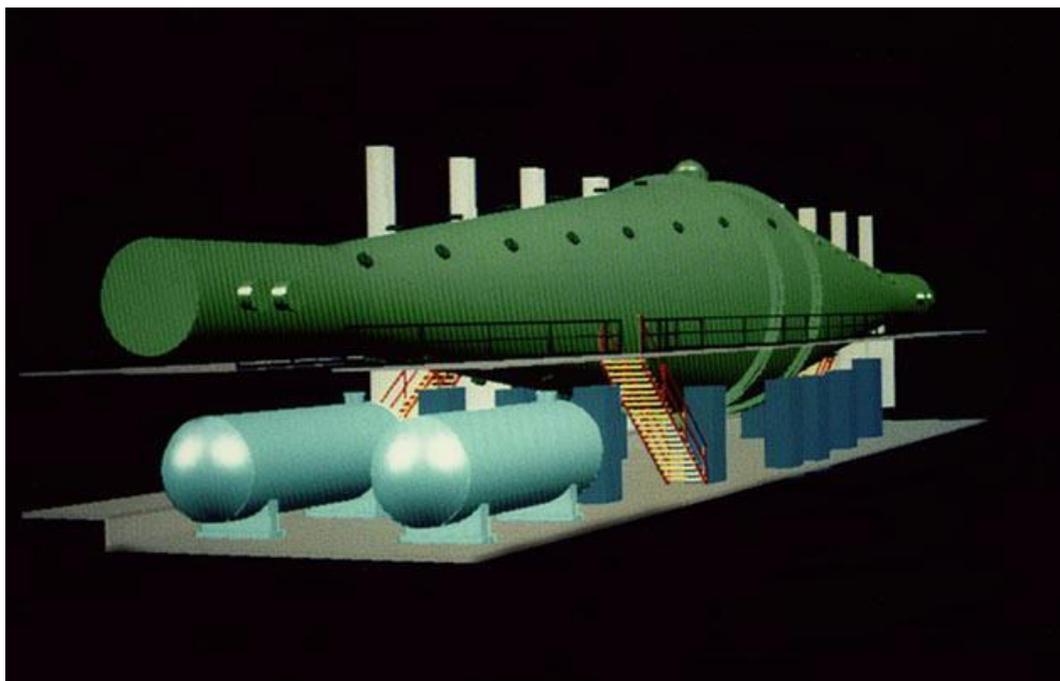


Figure 18: En haut, vue en perspective de l'enceinte du Vivitron. En bas principe de fonctionnement du tandem Van de Graaff installé à Strasbourg. Les ions négatifs sont issus d'un petit accélérateur linéaire.

Chapitre 4 Accélérateurs linéaires

Introduction

Nous venons de voir que la principale limitation des accélérateurs à tension continue est liée aux problèmes de décharges électriques. Dès 1924, Ising proposa un dispositif qui contournait cette difficulté (Figure 19). Dans ce dispositif, des particules positives traversent une succession d'électrodes cylindriques appelées tubes de glissement. Au moment où une particule positive est face à l'entrée d'un tube, une impulsion électrique négative est envoyée à ce tube. La particule est alors "attirée" vers l'intérieur du tube. L'impulsion doit être terminée avant que la particule ne se présente à la sortie du tube. Ainsi, à chaque traversée d'un tube une particule de charge $+Q$ gagne une énergie QV . En théorie, en appliquant ce principe plusieurs fois tout au long du parcours, une addition des accélérations doit être obtenue. Ce principe d'Ising, n'a pas été appliqué à ce jour à cause de la difficulté pour synchroniser les impulsions.

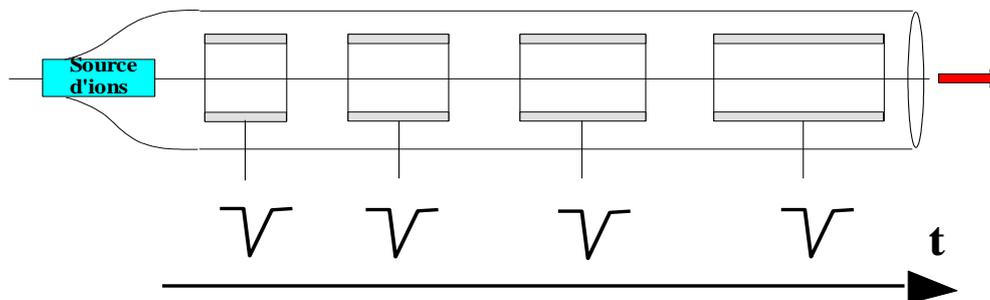


Figure 19: Principe d'accélérateur proposé par Ising en 1924. Une série d'impulsions très courtes et correctement synchronisées est envoyée sur une succession de tubes de glissement.

Très vite les ingénieurs ont compris que pour réaliser un accélérateur linéaire il fallait utiliser un champ électrique radiofréquence, et que la particule devait être soustraite de ce champ lorsqu'il devenait décélérateur.

L'inconvénient principal des LINACs réside dans le fait que la particule n'y passe qu'une fois, ce qui oblige à avoir un gain en énergie par longueur d'accélérateur élevé (> 10 MeV/m). Cela impose d'avoir des puissances radiofréquence élevées ($> MW$) qui ne peuvent être obtenues qu'en mode impulsional. Les LINACs sont donc des accélérateurs pulsés.

De plus deux cas doivent être envisagés:

- les particules lourdes, donc les ions, qui sont non relativistes au moment de leur injection dans l'accélérateur. Leur vitesse va croître au cours de l'accélération. Dans ce cas, il faut réaliser une succession d'accélération en appliquant un champ entre des tubes de glissement. A l'intérieur d'un tube la particule est soustraite au champ.
- les électrons, qui sont très vite relativistes. Dans ce cas, l'accélérateur est en fait un guide d'onde, dans lequel la vitesse de phase de l'onde est proche de la vitesse de la lumière. L'onde "porte" alors la particule (analogie du surfer) et lui apporte de l'énergie tout au long de l'accélérateur.

Les accélérateurs linéaires sont utilisés pour les électrons (le SLAC à Stanford mesure 3 km et fournit des e^- de 32 GeV). Les LINACs pour les ions sont peu utilisés en recherche, car le gain en énergie est non compétitif face aux cyclotrons.

Théorie des Accélérateurs linéaires

Rappels

Un accélérateur à ions peut être constitué d'une suite de fente d'accélération séparées les unes des autres par des tubes de glissement dans lesquels la vitesse des particules reste constante ($\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$) car le champ électrique y est nul. Si une particule se présente à l'entrée de la fente n avec un énergie cinétique E_c elle en sortira avec un gain en énergie $\Delta E_c^n = qV \sin \theta_n$. La phase du champ dans la fente n étant θ_n . Dans la fente suivante, si l'on veut que la particule subisse la même accélération, soit un gain $\Delta E_c^{n+1} = qV \sin \theta_{n+1} = \Delta E_c^n$ il faut imposer:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Ce qui revient à dire que la période du champ accélérateur doit être telle que:

$$T = \frac{d}{\|\vec{v}\|}$$

avec d distance entre la fente n et la fente $n+1$ et v la vitesse de la particule. C'est ce qui définit le synchronisme. Mais la particule accélérant tout au long de son trajet dans l'accélérateur on a en fait $v=v(t)$ donc il faut soit:

- faire varier la fréquence $\nu = 1/T$ et conserver d constant
- faire varier d tout en conservant constante la fréquence ν du champ accélérateur

De plus pour qu'il y ait accélération il faut:

$$\Delta W^n > 0 \Rightarrow 0 < \theta_n < \pi$$

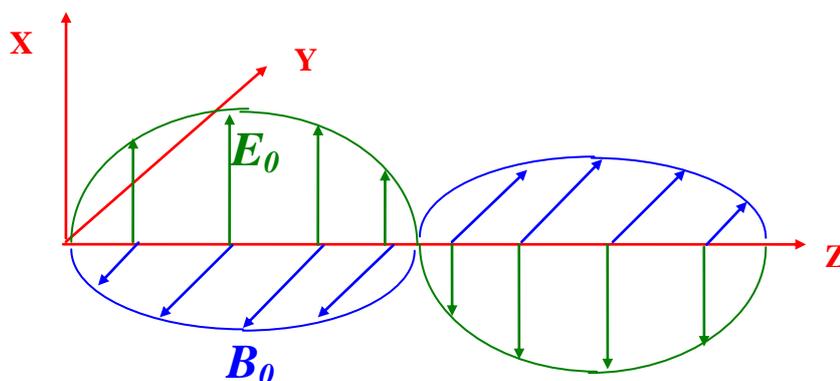
Une particule est dite de référence, si elle suit exactement la loi de phase $\theta_{n+1} = \theta_n + 2k\pi$. Les autres particules viennent se grouper autour dans l'intervalle de phase $\Delta\theta$. Dans un faisceau quasi-monoénergétique produit dans un accélérateur linéaire toutes les particules sont dans $\Delta\theta \ll 2\pi$. En fait le faisceau est constitué de micro-paquets séparés les uns des autres par

$$T = \frac{1}{\gamma}$$

Pour finir on peut aussi considérer un accélérateur comme un tuyau cylindrique où se propage un champ électrique synchrone des particules qui circulent le long de son axe.

Champ accélérateur

Dans un espace vide une onde électromagnétique a des composantes vectorielles du champ électrique et magnétique qui sont perpendiculaires au sens de propagation (onde électromagnétique transverse).



Mais dans un milieu terminé par des conducteurs parfaits, une telle onde n'existe pas du fait des conditions aux limites qui doivent être remplies (la composante tangentielle E_t du champ électrique ainsi que la composante normale B_n du champ magnétique doivent être nulles). Ces conditions sont remplies si l'onde a une de ces composantes dans la direction de propagation Oz . Si c'est le champ électrique E_z l'onde est dite "Transverse Magnétique" (TM). Si c'est le champ Magnétique B_z l'onde est dite "Transverse Electrique" (TE). Intéressons nous maintenant au moyen de propager une onde dans un guide en étudiant les réflexions sur les murs. L'onde a bien sûr une composante dans le sens de propagation, mais tous les angles d'incidence et de réflexion ne sont pas permis (cf condition de résonance en annexe). Seules des valeurs discrètes satisfont les conditions de résonance. Pour chaque type d'onde on peut donc définir des modes qui sont représentés par des indices. Dans une cavité rectangulaire on a donc les modes TM_{mn} ou TE_{mn} où m et n représentent le nombre de demi-ondes dans les directions x et y .

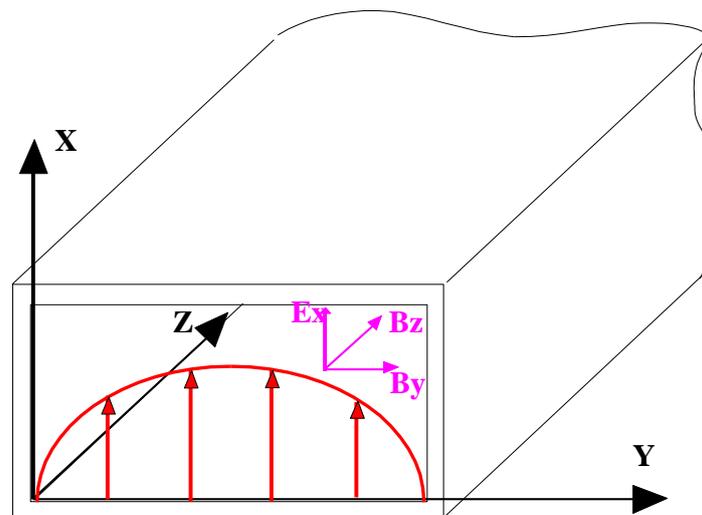


Figure 20: Cavit e rectangulaire en mode TE_{01} .

Dans le cas des cavit es r esonantes il y a un troisi eme indice qui rend compte du nombre de demi-ondes dans la direction Oz .

Lorsque l'on étudie la propagation des ondes électromagnétiques deux vitesses peuvent être définies:

- 1) la vitesse de phase v_{ph} . C'est en fait la vitesse de propagation du phénomène ou du champ. Pour bien comprendre ce dont il s'agit utilisons une analogie: lorsqu'une vague arrive obliquement sur la plage, le déferlement se propage parallèlement au rivage avec une grande vitesse, c'est la vitesse de phase. Une onde électromagnétique se déplaçant à la vitesse c et obliquement par rapport aux cotés de la cavité va provoquer un phénomène se déplaçant avec une vitesse de phase supérieure à c . C'est cette vitesse qui est la plus importante pour l'accélération car elle doit être proche de la vitesse des particules.
- 2) la vitesse de groupe v_g . C'est en fait la vitesse de propagation de l'information ou de l'énergie selon l'axe de la cavité. (dans un guide cylindrique lisse $c^2 = v_{ph} \times v_g$)

Maintenant nous allons définir l'équation d'évolution du champs en fonction du temps et de la position. Prenons le cas, très fréquent dans les accélérateurs, d'une électromagnétique TM_{01} se propageant dans un tuyau cylindrique. Dans ce cas, il est préférable de se placer dans un système de coordonnées cylindriques (l'indice 0 indique alors le nombre de demi-ondes suivant e_ϕ et l'indice 1 le nombre de demi-ondes suivant e_r ($0 < r < R_{cyl}$).

A partir des équations de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

sachant que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &= \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} - \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \left(\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \right) \text{ car le rotationnel est indépendant de } t \\ &= \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \text{ car on suppose qu'il n'y pas de charge} \\ &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{en l'absence de courant} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit sous la forme plus classique de l'équation d'onde:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

et comme nous sommes en coordonnées cylindriques et que le champ ne dépend pas de φ :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions se mettent sous la forme:

$$E_z(z, r, t) = Z(z)R(r)T(t)$$

avec $Z(z) \propto e^{-jkz}$ et $T(t) \propto e^{j\omega t}$. On définit k comme étant l'avance de phase de l'onde par unité de longueur et ω la fréquence angulaire ou changement de phase par unité de temps. Si à $z = 0$ et $t = 0$ l'onde présentait un maximum (crête), il y en aura un à chaque fois que:

$$\omega t - kz = 0 \quad (27)$$

C'est ce qui définit le lieu de l'espace-temps où l'accélération des particules sera maximum. A partir de l'équation 27, on déduit:

$$\frac{z}{t} = \frac{\omega}{k} = v_{ph}$$

Remplaçons dans l'équation 26 les solutions du champ:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) R = 0 \quad \text{soit}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + K_r^2 R = 0$$

Les solutions particulières de cette équation différentielle linéaire sont les fonctions de Bessel de 1^{ère} et 2^{ème} espèces d'ordre 0 (voir annexe B) $R(r) = AJ_0(K_r r)$. Sur la surface du tube cylindrique ($r = r_{\max}$) le champ doit être nul donc $J_0(K_r r_{\max}) = 0 \Rightarrow K_r r_{\max} = 2.405$. Cela permet de fixer la valeur de K_r . On en déduit l'équation de dispersion :

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = K_r^2 + k^2$$

Le diagramme de Brillouin représente $\omega = f(k)$.

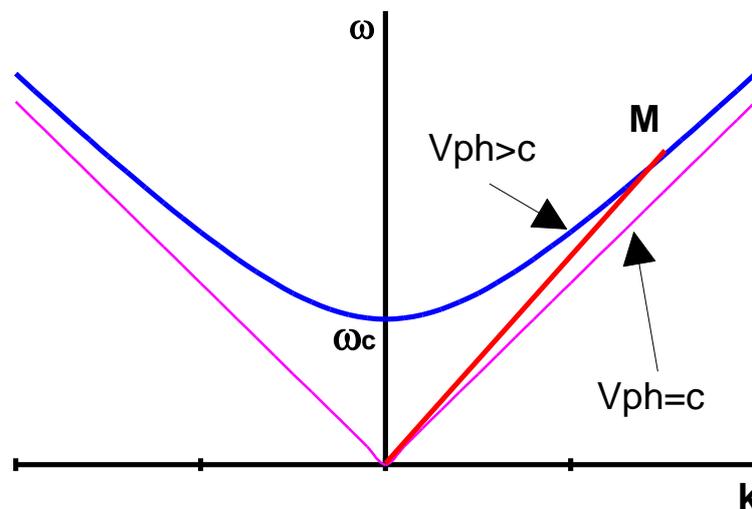


Figure 21 : Diagramme de dispersion pour une cavité vide.

Les conditions aux limites du tube sont vérifiées si l'on se déplace sur l'hyperbole en bleu. La vitesse de phase est donnée par les coordonnées du point M : $v_{ph} = \omega/k$. L'asymptote de cette courbe correspond à une vitesse de phase égale à c . Donc la vitesse de phase est supérieure à c lorsque l'on se déplace sur la courbe de dispersion. La vitesse de groupe est quant à elle donnée par $v_g = d\omega/dk$. De plus $\omega_c = 2\pi f_c$, fixe la plus petite fréquence qui permet de vérifier l'équation de dispersion, mais dans ce cas la vitesse de groupe est nulle et la vitesse de phase est infinie. Or pour accélérer une particule il faut un champ électrique longitudinal qui se propage à la vitesse des particules, soit $v_{ph} = v_p$. La vitesse des particules étant nécessairement inférieure à c , il faut diminuer par un artifice technologique la vitesse de phase si on veut accélérer des particules par une onde électromagnétique.

La méthode la plus simple consiste à disposer des « murs » régulièrement espacés tout au long du guide d'onde. La figure 22 montre le principe d'un tel guide. La solution de l'équation d'onde devient alors beaucoup plus complexe et il faut faire intervenir le théorème de Floquet pour les structures périodiques ainsi que les séries de Fourier pour obtenir les solutions.

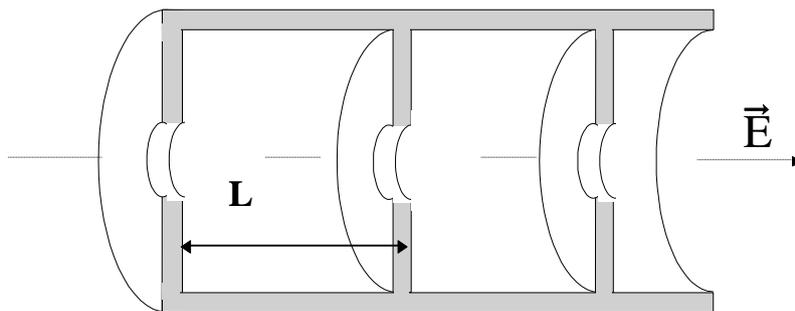


Figure 22 : Structure simple de guide d'onde pour l'accélération d'ion.

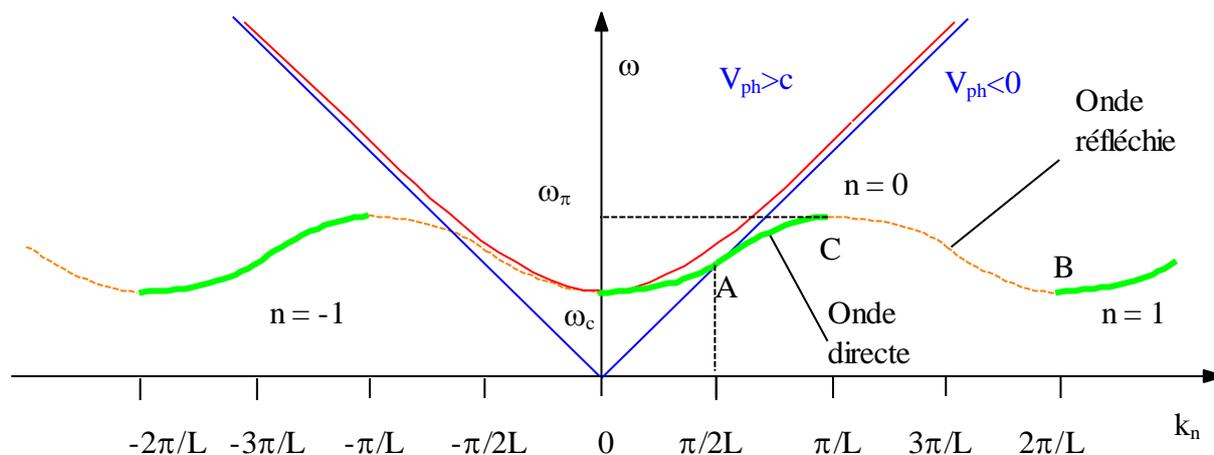
On obtient alors les deux relations importantes:

$$K_m^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(k + \frac{2\pi n}{L}\right)^2$$

et

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k + \frac{2\pi n}{L}} = \frac{\omega}{k_n}$$

Pour chaque valeur de n il y a donc une valeur de v_{ph} et on doit trouver une valeur v_{ph} égale à la vitesse des particules v_p . On remarque cependant que dans ce cas $K_m^2 < 0$ est imaginaire. Les solutions de l'équation d'onde sont alors les fonctions de Bessel modifiées. La relation de dispersion (relation entre ω et k_n) peut alors être représentée par :



De cette figure on déduit que :

- Pour un type d'onde et un mode donné il y a une bande de fréquence donnée allant de ω_c à ω_π (la vitesse de groupe étant nulle pour ces deux valeurs).
- Il y a une infinité d'harmoniques ($n \in [-\infty, +\infty]$) correspondant à la même fréquence. Dans ce cas, les vitesses de groupe sont identiques mais les vitesses de phase sont croissantes.

On remarque également que la vitesse de groupe et la vitesse de phase peuvent ne pas aller dans la même direction.

On définit aussi à partir de cette figure deux types d'ondes. L'onde progressive lorsque l'énergie se propage dans une seule direction (trait plein). Une onde stationnaire (somme d'une onde directe et d'une onde réfléchie).

Les ondes progressives sont surtout utilisées pour accélérer des particules dont la vitesse est voisine de celle de la lumière. Le point de fonctionnement de ce type de guide se situe autour du point A. Cela correspond à une avance de phase par période de la structure L égale à $\pi/2$ (modulo 2π). Dans ce cas, la vitesse de phase est proche de c . Les ondes stationnaires sont réservées aux particules très lentes (ions). Les points de fonctionnement de ce type d'onde sont représentés par les points B et C de la courbe de dispersion. L'avance de phase lorsque l'on se déplace d'une structure à une autre (ce qui correspond à se déplacer suivant l'axe z d'une distance L) est alors de 0 ou de π (modulo 2π). Il est très important de remarquer que ce n'est que pour ces deux points que la vitesse de phase des ondes directes et réfléchies sont égales et que la vitesse de groupe est alors nulle.

Groupement longitudinal

Dans un premier temps, nous allons étudier l'effet du champ électrique variable sur un faisceau monoénergétique continu : supposons que les particules sont injectées dans l'accélérateur linéaire avec des vitesses identiques β_i mais légèrement séparées en temps les unes des autres. Il est donc intéressant de connaître les conséquences de cette dispersion sur l'accélération. Pour cela, nous allons étudier une cellule accélératrice de longueur L dont la distance entre les tubes de glissement est g . Le faisceau de particules d'intensité I_i est supposé continu et monocinétique ($E_i = m\gamma_i$). La vitesse des particules est alors :

$$\beta_i = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_i^2}} \quad (28)$$

Le champ est de la forme $E_0 \cos \omega t$ et donc le potentiel est $V(t) = V_0 \sin \omega t$, le gain en énergie peut en première approximation s'écrire sous la forme :

$$E_f = m\gamma_f = E_i + qV_0 \sin \omega t$$

Donc l'énergie du faisceau à la sortie de la cellule va satisfaire la condition :

$$E_f^{\min} \leq E_f \leq E_f^{\max}$$

$$E_i - qV_0 \leq E_f \leq E_i + qV_0$$

Les valeurs E_f^{\min} et E_f^{\max} sont obtenues respectivement pour des phases $\varphi = \omega t$ égales à $-\pi/2$ et $\pi/2$. Lorsque la phase est 0 ou π on définit

$$E_f^{\text{int}} = E_i$$

et aussi

$$\gamma_f^{\text{int}} = \gamma_i \text{ et } \beta_f^{\text{int}} = \beta_i$$

on peut alors définir la variation en énergie lors du passage dans la cellule :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_i} = \frac{\gamma_f^{\max} - \gamma_f^{\min}}{\gamma_f^{\text{int}}}$$

qui a pour expression dans notre exemple :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_i} = \frac{2qV_0}{E_i}$$

de la même manière on définit :

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_i} = \frac{\beta_f^{\max} - \beta_f^{\min}}{\beta_f^{\text{int}}}$$

or compte tenu de la relation (28) :

$$2\beta\Delta\beta = \frac{2\Delta\gamma}{\gamma^3}$$

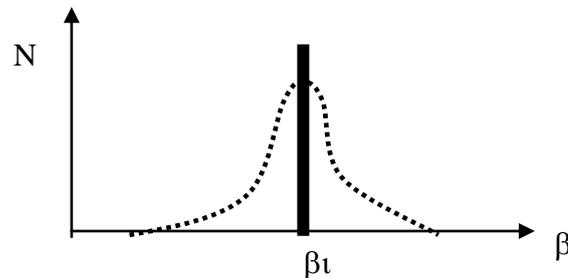
$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \frac{1}{\beta^2\gamma^2}$$

$$= \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \frac{1}{1-\gamma^2} \quad \text{car } \beta^2\gamma^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\gamma^2 = \gamma^2 - 1$$

et utilisant la relation nous donnant le gain en énergie $\frac{\Delta\gamma}{\gamma_i}$ on obtient l'expression de la variation de vitesse des particules due au champ électrique variable dans le temps :

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_i} = \frac{2qV_0}{E_i} \frac{1}{\frac{E_i^2}{m^2} - 1}$$

On constate donc que les particules arrivant dans la cellule toutes avec la même vitesse, β_i , mais à des temps différents vont subir une modulation de vitesse $\Delta\beta$ du fait du champ.



On peut aussi en déduire l'évolution de la phase des particules, c'est à dire connaître leurs regroupements temporels à la sortie de notre cellule élémentaire. Si une particule synchrone rentre dans la cellule au temps $t_i^s=0$ compte tenu de sa vitesse v_p elle ressortira de la cellule au temps $t_f^s = L/v_p$ donc sa phase sera:

$$\begin{aligned} \varphi_f^s &= \omega t_f^s \\ &= \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{L}{v_p} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{L}{\beta_s} \end{aligned}$$

(bien évidemment dans ce cas on a pris $\varphi_i^s=0$)

Une particule non synchrone rentrera avec la phase φ_i et ressortira de la cavité avec la phase:

$$\begin{aligned} \varphi_f &= \varphi_i + \omega t_f \\ &= \varphi_i + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{L}{\beta} \end{aligned}$$

Donc pour un écart par rapport à la phase synchrone à l'entrée $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^s$, la différence de phase à la sortie sera:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_f &= \varphi_f - \varphi_f^s \\
&= \varphi_i + \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_s} \right) \\
&= \varphi_i - \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\frac{\beta - \beta_s}{\beta\beta_s} \right)
\end{aligned}$$

Maintenant si on suppose un écart de vitesse faible entre particules synchrones et non synchrones i.e. $\beta\beta_s \cong \beta_s^2$ et $\Delta\beta = \beta - \beta_s$ alors:

$$\Delta\varphi_f = \varphi_i + \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_s^2} \right)$$

nous connaissons déjà l'expression de $\frac{\Delta\beta}{\beta_s} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \frac{1}{\beta_s^2 \gamma_s^2}$, de plus la particule synchrone nous donne:

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma &= \gamma - \gamma_s \\
&= \frac{E_i + qV_0 \sin \varphi_i}{m} - \frac{E_i + qV_0 \sin \varphi_i^s}{m} \\
&= \frac{qV_0 \sin \varphi_i}{m}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_s} = \frac{qV_0 \sin \varphi_i}{\gamma m} \frac{1}{\frac{E_i^2}{m^2} - 1}$$

et comme $\frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}}$ on obtient:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_s^2} = \frac{qV_0 \sin \varphi_i}{E_i} \left(\frac{1}{\frac{E_i^2}{m^2} - 1} \right) \frac{\frac{E_i}{m}}{\sqrt{\frac{E_i^2}{m^2} - 1}}$$

et on en déduit:

$$\Delta\varphi_f = \varphi_i - \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{qV_0 \sin \varphi_i}{m} \frac{1}{\left(\frac{E_i^2}{m^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

C'est une compression de phase. Par exemple des électrons accélérés sous une tension de 10 kV dans une cellule où $L/\lambda = 3$ occuperont 40° de phase alors qu'à leur entrée ils occupaient 225° de phase. Leur dispersion en énergie sera elle de $\Delta\gamma/\gamma = 3\%$.

Gain en énergie

Maintenant, il est intéressant de connaître l'effet du champ accélérateur sur les particules et de calculer le gain en énergie dans le cas d'une cellule accélératrice réelle. Pour cela il faut d'abord établir l'expression du champ en tenant compte des conditions aux limites. Considérons un champ de type TM_{01} dans une structure avec des tubes de glissement (Structure Alvarez ou **Drift Tube Linac**) représentée sur la figure 23.

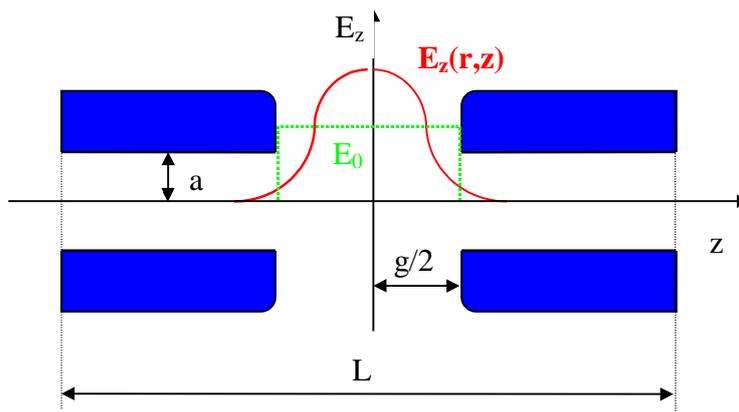


Figure 23 : Forme du champ dans une cellule accélératrice de symétrie cylindrique. Seuls les tubes de glissement sont représentés (la forme de la cavité n'a pas d'importance). La forme du champ, en pointillés verts, est celle obtenue en négligeant les effets de bords ou en plaçant une grille à la sortie de chaque tube. Le champ réel est représenté en trait plein rouge.

La solution générale de l'équation d'ondes exprimée sous la forme d'intégrale de Fourier s'écrit :

$$E_z(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k I_0(k_r r) \cos kz dk$$

l'expression des coefficients A_k est obtenue par inversion de l'intégrale de Fourier :

$$A_k I_0(k_r r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(r, z) \cos kz dz \quad (29)$$

avec

$$k_r = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Les conditions aux limites ($E_z(a, z) = E = \text{constante}$ et $-\frac{g}{2} \leq z \leq \frac{g}{2}$) permettent de déterminer les coefficients A_k :

$$A_k = \frac{Eg}{2\pi} \frac{\sin(k \frac{g}{2})}{k \frac{g}{2}} \frac{1}{I_0(k_r a)}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$E_z(r, z) = \frac{Eg}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k \frac{g}{2})}{k \frac{g}{2}} \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \cos kz dz$$

on en déduit alors le gain en moment quand une particule de charge q passe de la cellule n à la cellule $n+1$:

$$\Delta W^n = q \int_{-\frac{Ln}{2}}^{+\frac{Ln}{2}} E_z(r, z, t) dz = q \int_{-\frac{Ln}{2}}^{+\frac{Ln}{2}} E_z(r, z) \cos(\omega t + \varphi) dz$$

La phase de l'onde φ est comptée à partir du maximum (sommet de la « vague ») et on suppose que le temps est égal à 0 lorsque la particule est au milieu de l'espace accélérateur. De plus, la vitesse de la particule v_p est connue et considérée comme quasiment constante, d'où $z = v_p t$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta W^n &= q \int_{-\frac{L_n}{2}}^{+\frac{L_n}{2}} E_z(r, z) \left[\cos \frac{\omega z}{v_p} \cos \varphi - \sin \frac{\omega z}{v_p} \sin \varphi \right] dz \\ &= qEg \frac{\sin(k \frac{g}{2})}{k \frac{g}{2}} \frac{I_0(k, r)}{I_0(k, a)} \cos \varphi\end{aligned}$$

Il est important de noter que l'on retrouve le gain en énergie d'une particule traversant l'espace accélérateur à une phase φ ($qEg \cos \varphi$) mais réduit par le facteur $\frac{\sin(k \frac{g}{2})}{k \frac{g}{2}} \frac{I_0(k, r)}{I_0(k, a)}$.

De plus Eg peut être remplacé par la valeur intégrale sur l'axe E_0L et en définissant $T(k, r)$, le facteur de temps de transit, par :

$$T(k, r) = \frac{\sin(k \frac{g}{2})}{k \frac{g}{2}} \frac{I_0(k, r)}{I_0(k, a)} = T(k) I_0(k, r)$$

on obtient :

$$\Delta W^n = qE_0 L T(k, r) \cos \varphi$$

Maintenant il est possible de déterminer complètement les composantes des champs électriques et magnétiques. Les équations de Maxwell nous donnent :

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\Delta} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ce qui permet d'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}E_r(r) &= -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial E_z}{\partial z} r dr \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t}\end{aligned}$$

Finalement en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel on obtient :

$$\begin{aligned}E_z(r, z, t) &= \frac{E_0 L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k) I_0(k, r) \cos kz \cos(\omega t + \varphi) dk \\ E_r(r, z, t) &= \frac{E_0 L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k) \frac{k}{k_r} I_1(k, r) \sin kz \cos(\omega t + \varphi) dk \\ B_\theta(r, z, t) &= \frac{E_0 L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k) \frac{1}{k_r} I_1(k, r) \cos kz \sin(\omega t + \varphi) dk\end{aligned}$$

On remarque que E_z et E_r sont en phase alors que B_θ est en avance de $\pi/2$ sur E_z .

Après avoir obtenu le gain en énergie dans une cellule il est alors possible de connaître l'évolution en moment transverse des particules. Souvent on l'écrit sous la forme :

$$\Delta P_r^n = q \int_{-\frac{L_i}{2}}^{+\frac{L_i}{2}} \left[E_r(r, z) \cos \left(\frac{\omega z}{v_p} + \varphi \right) - v_p B_\theta(r, z) \sin \left(\frac{\omega z}{v_p} + \varphi \right) \right] \frac{dz}{v_p}$$

Mouvement longitudinal dans une structure périodique

Le mouvement longitudinal des particules sera traité en détail dans le chapitre concernant la théorie des accélérateurs circulaires et pourra être étendu aux LINAC. Cependant on peut sans démonstration avoir une idée de ce qui se passe dans un accélérateur linéaire. En fait, l'étude du mouvement longitudinal conduit au principe de la stabilité de phase. Considérons un gain en énergie $qV = qV_0 \cos\varphi$ après la traversée d'une cellule et supposons que ce gain permette à la particule de se présenter à l'intervalle accélérateur $n+1$ juste une période après être passée dans l'intervalle n . Sur la figure 24 on constate qu'il existe deux phases par période R.F. pour lesquelles la condition $qV = qV_0 \cos\varphi$ est satisfaite (points M et P). Bien sûr très peu de particule vont satisfaire cette condition. Cependant une particule arrivant légèrement en retard, soit en M_1 recevra un peu plus d'énergie que la particule de référence. Elle ira donc plus vite et comblera son retard. Une particule arrivant en avance, M_2 , recevra moins d'énergie et perdra son avance. Autour de M il y a donc stabilité de phase. Par contre, autour de P il y a instabilité de phase.

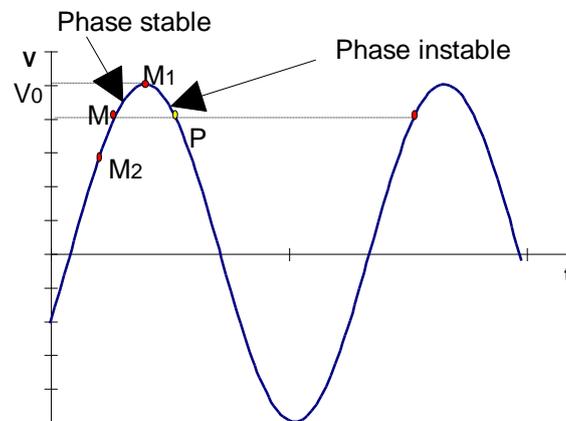


Figure 24: Principe de la stabilité de phase

Pour conclure, la stabilité de phase est obtenue lorsque le champ est croissant et positif c'est à dire lorsque la relation $0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}$ est vérifiée. Si les points M_1 et M_2 représentent les points limites au delà desquels les particules injectées ne sont plus acceptées on peut définir un taux de capture par rapport à des particules arrivant à toutes les phases :

$$t_{cap} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}$$

Paramètres des Cavités

Les paramètres importants des cavités sont :

- Temps de transit T

$$T = \frac{\left| \int_0^L E_z(z,0) e^{-j(\omega z/v_p)} dz \right|}{\int_0^L E_z(z,0) dz}$$

Le temps de transit T est représentatif de l'efficacité du champ E_z à accélérer des particules.

- L'impédance de shunt effective Z_{eff} permet de déterminer l'efficacité d'accélération pour une puissance RF donnée :

$$Z_{eff} = \frac{(E_0 T)^2}{-dP/dz}$$

Z_{eff} s'exprime en $[\mathbf{M}\Omega\mathbf{m}^{-1}]$, P est la puissance perdue par effet Joule dans les parois le long de la structure et $E_0 T$ est l'amplitude de l'harmonique.

- Le facteur de qualité Q :

$$Q = \omega \frac{w}{-dP/dz}$$

w est l'énergie stockée par unité de longueur. En fait c'est le rapport de l'énergie emmagasinée dans la cavité par l'énergie perdue par effet Joule dans les parois au cours d'une période R.F.

- La vitesse de groupe est aussi défini par :

$$v_g = \frac{P}{w}$$

Comme $w \propto E^2$ une petite vitesse de groupe est souvent utilisée ce qui permet de minimiser la puissance RF utilisée.

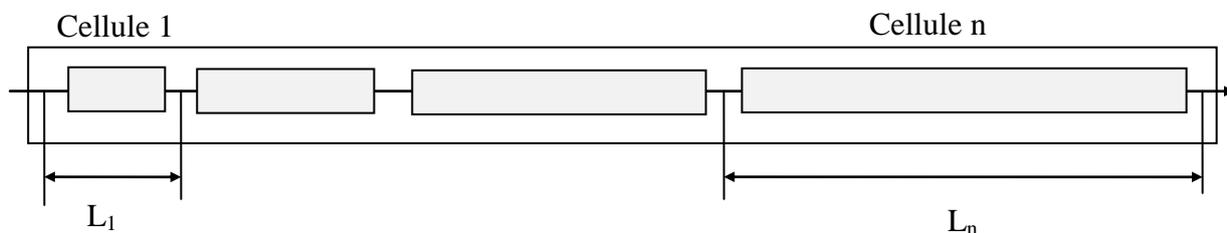
- Le temps de remplissage t_F :

$$t_F = \int_0^L \frac{dz}{v_g(z)}$$

C'est le temps que met l'énergie électromagnétique pour remplir la cavité dans le cas d'une onde progressive. Pour une onde stationnaire :

$$t_F \propto \frac{Q}{\omega}$$

Pour finir nous allons essayer de déterminer la longueur d'un accélérateur à ions en fonction de l'énergie finale désirée et du gain en énergie par cavité.



Considérons une particule synchrone de masse m , le déphasage entre deux fentes consécutives doit être de $n\pi$ pour un temps de parcours entre fentes $nT/2$. La longueur d'une cavité est alors:

$$\begin{aligned} L_i &= v_{pi} n \frac{T}{2} \\ &= n \beta_i \frac{\lambda}{2} \\ &= n \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

E_c est l'énergie cinétique de la particule à l'entrée de la cavité. Considérons maintenant que la moyenne des longueurs des cellules $\langle Ln \rangle$ soit la longueur correspondante à l'énergie $E_c^f/2$ (énergie cinétique finale). On a:

$$E_c^f = \sum_i E_c^i = N \Delta E_c$$

N est le nombre de cavité et ΔE_c est l'énergie gagnée par cavité et supposée constante. On en déduit:

$$\begin{aligned} L &= N \langle L_i \rangle \\ &= N n \sqrt{\frac{E_c^f}{m}} \frac{\lambda}{2} \\ &= n \frac{E_c^f}{\Delta E_c} \sqrt{\frac{E_c^f}{m}} \frac{\lambda}{2} \\ L &= \frac{n}{\Delta E_c} \sqrt{\frac{(E_c^f)^3}{m}} \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

La première conséquence est que la géométrie de l'accélérateur fixe complètement l'énergie de sortie des particules. Si on fait apparaître la masse du proton on obtient:

$$L = \frac{n}{\Delta E_c} \sqrt{\frac{(E_c^f)^3}{A m_p}} \frac{\lambda}{2}$$

A est la masse atomique de l'ion accéléré. De plus le gain en énergie d'une particule traversant un espace accélérateur s'obtient par:

$$\Delta E_c^n = Q \int E_n \sin \varphi(s) ds = Q E_n \Delta l_n \sin \varphi_s$$

φ_s est la phase de la particule de référence, $\varphi(s)$ est celle vue par l'ion .

Les différentes structures accélératrices

Les différentes structures accélératrices sont généralement classées en fonction du paramètre cinématique β des particules qu'elles doivent accélérer. On considérera le cas des structures RFQ à part.

1. Structure *wideroë* $\beta \ll 1$

Ainsi pour des ions juste après l'injection, la structure *wideroë* utilisée par Sloan et Lawrence (figure 25) est bien adaptée. C'est avec cette structure qu'en 1931 ils ont obtenu des ions Hg à 1,25 MeV (le dispositif comportait 30 tubes de glissement et fut amélioré en 1934 pour atteindre 2,8 MeV). Pour obtenir ce résultat ils utilisaient une tension r.f. de 42 kV à une fréquence de 7 MHz. Dans cette structure la différence de phase à un instant donné entre deux espaces accélérateurs est π : c'est donc une structure de mode π . Ce type de structure fonctionne généralement avec des fréquences comprises entre 1 et 100 MHz.

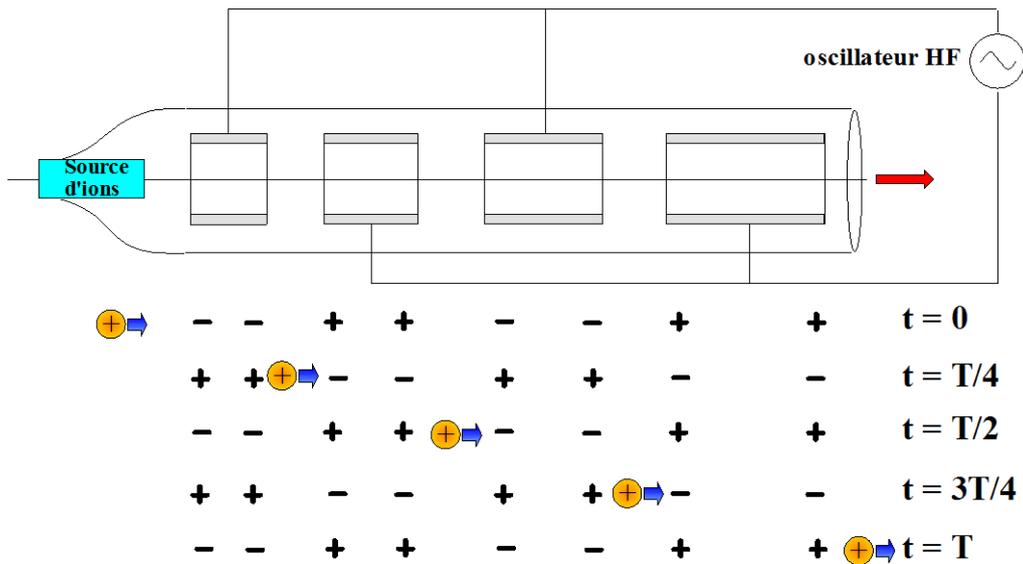


Figure 25: Principe d'accélération de la structure Wideröe.

2. Structure Alvarez ou DTL $0,02 < \beta < 0,4$

Dans ce cas, on utilise une suite de cavités résonantes comme le montre la figure 26.

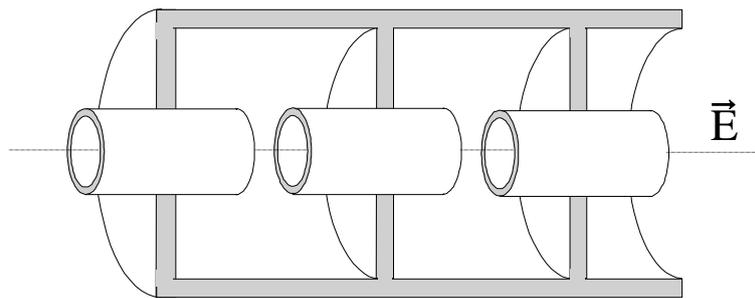


Figure 26: Structure Alvarez

Les particules passent de l'une à l'autre au travers des tubes de glissement. Si le déphasage d'une cavité à l'autre est de 2π , alors les courants dans les parois sont de sens contraire. On peut alors supprimer les parois. En fait, pour conserver la condition de synchronisme les tubes de glissement ont des longueurs croissantes .

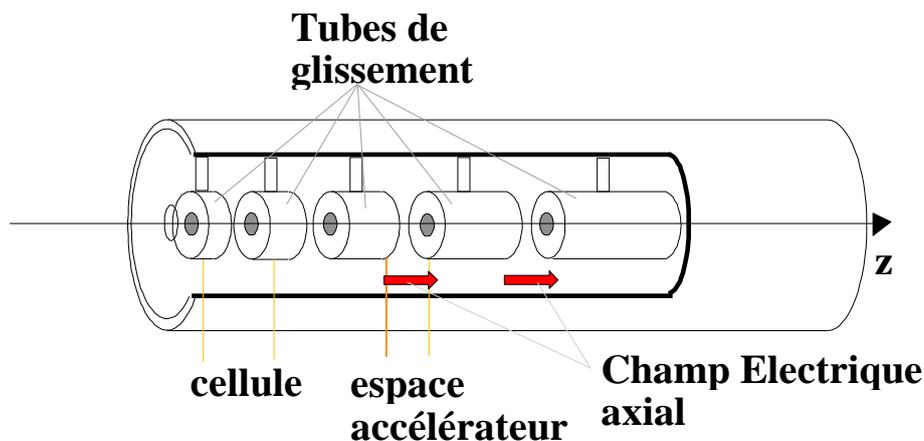


Figure 27: Cavité Alvarez fonctionnant en mode 2π ($k=2$)

Pour avoir une bonne protection du champ il faut que la longueur des tubes soit suffisamment grande devant leur diamètres. Ces dimensions sont fixées par les conditions d'injection (énergie d'injection E_{inj}) et par la longueur d'onde λ (donc la fréquence des klystrons) de l'onde injectée dans la structure:

$$\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_{inj}}{m}}} L_0$$

où L_0 est la longueur minimum du premier tube.

Les structures de type Alvarez fonctionnent de 100 à 400 MHz.

3. Structure à cavité couplées (proton) $\beta > 0,4$

Les pertes RF devenant très importantes et les tubes de glissement ayant tendance à ce comporter comme des antennes (car leur longueur se rapproche de $\lambda/2$), pour des $\beta=0,5$ des cavités couplées sont utilisées (figure 28)

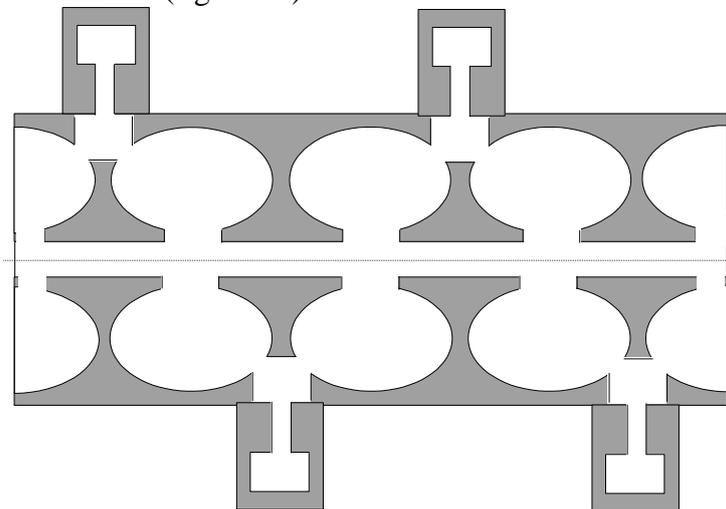


Figure 28: Schéma de principe de structure à cavités couplées

Ce type de structure est utilisé pour des fréquences allant de 600 MHz à 1,2 GHz.

4. Structure à Iris $\beta=1$

Les structures à iris sont surtout utilisées pour les électrons. Une onde stationnaire, somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverse, est produite à l'intérieur d'un guide cylindrique muni d'iris (figure 29).

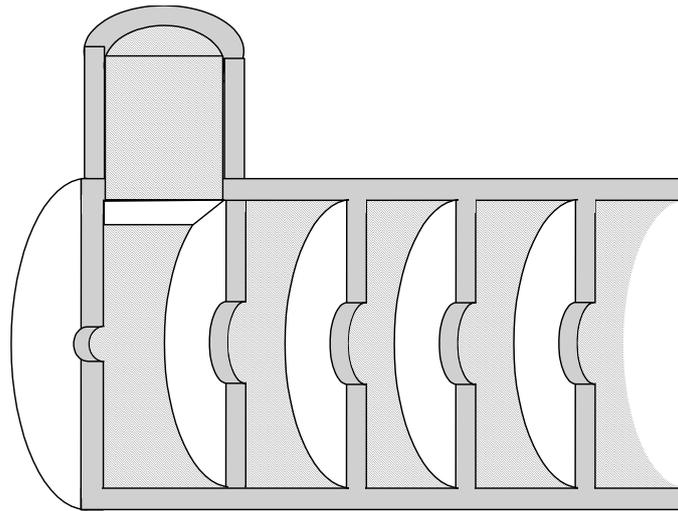


Figure 29: Schéma d'une structure à Iris

5. Structure RFQ (Radio Frequency Quadrupole)

Pour accélérer des ions lourds ou des protons de très petit β on utilise des structures RFQ. Cette structure peut même remplacer les injecteurs électrostatiques de type Cockroft-Walton, car l'énergie atteint 750 KeV. Le principe d'une structure RFQ est représenté sur la figure 30. C'est un quadrupole haute fréquence dont la forme des électrodes varie selon la position z . Ceci entraîne une modulation du champ électrique et permet d'obtenir une composante longitudinale du champ. Le quadrupole constitue donc une succession de cellules accélératrices. Cela constitue une structure en mode π .

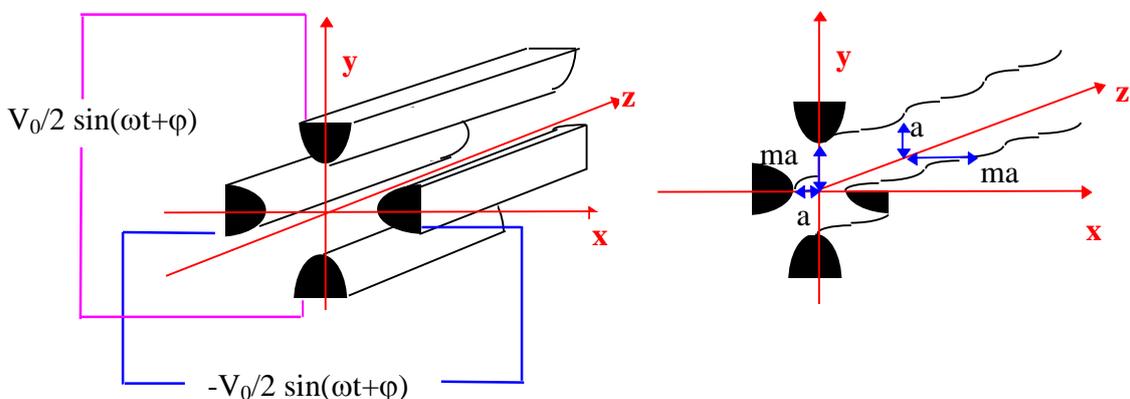


Figure 30: Principe d'un quadrupole RFQ . Sur la figure de gauche sont simplement représentées les électrodes non modulées assurant la focalisation. La figure de gauche montre la modulation des électrodes suivant z qui permet d'obtenir une composante axiale du champ.

Le champ à l'intérieur est défini par :

$$E_r = \frac{V_0}{2} (2A_{01}r \cos 2\theta + kA_{10}I_1(kr) \cos kz)$$

$$E_\theta = VA_{01}r \sin 2\theta$$

$$E_z(r, z, t) = \frac{V_0}{2} kA_{10}I_0(kr) \sin kz$$

$$\text{avec } A_{10} = \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(mka)}$$

$$A_{01} = \frac{1}{a^2} (1 - A_{10} I_0(ka))$$

Bien évidemment chaque composante est multipliée par un facteur $\sin(\omega t + \varphi)$ pour tenir compte du fonctionnement radiofréquence du quadropole.

Accélérateurs linéaires à ions

Les accélérateurs linéaires à proton ne sont plus utilisés comme tel, mais ils servent d'injecteur dans les synchrotron à proton, car ils peuvent aisément fournir des énergies allant de 50 à 200 MeV. Les gains en énergie atteignent moins de 10 MeV/m.

Pour illustrer la fin de ce chapitre, on peut citer quelques accélérateurs linéaires à protons et à ions utilisés pour la recherche.

Le LINAC2 du CERN utilise des structures Alvarez. Il permet d'obtenir des courants de proton de 170 mA. Les paquets de particules ont pu avoir des longueurs comprises entre 20 et 150 μ s. La source est un duoplasmatron. Le pré-injecteur original était un Cockroft-Walton de 750 kV. Il a été remplacé par une structure RFQ. Le LINAC2 est constitué de trois séries des cavités Alvarez d'une longueur totale de 30 m qui font passer l'énergie des protons à 10 puis 30 et enfin 50 MeV. Le diamètre des cavités est de 1m et elles comportent au total 128 tubes de glissement. Le LINAC2 sert d'injecteur au booster du PS.

Le LINAC3, toujours au CERN, est en service depuis 1994. Il permet d'obtenir des ions Pb^{53+} . En fait cet accélérateur est constitué d'une source ECR à 14 GHz qui fournit des ions Pb^{27+} à 2,5 KeV/u. Une structure RFQ sert de pré-injecteur au LINAC3 qui augmente l'énergie des ions jusqu'à 4,2 MeV/u. Un éplucheur constitué d'une feuille de carbone de 1 mm permet alors d'obtenir des ions Pb^{53+} qui sont alors envoyés vers le booster du PS.

On mentionnera également l'UNILAC du GSI qui sert d'injecteur au synchrotron SIS qui utilise des structures Widerö et Alvarez.

Accélérateurs linéaires à électrons

Les accélérateurs à électrons utilisent tous des guides d'ondes à iris, car les particules ont dans ce cas des vitesses proche de c. Il faut alors créer une onde stationnaire, somme de deux ondes progressives l'une se déplaçant dans la même direction que le faisceau et l'autre en sens inverse. On montre facilement que l'onde inverse a une influence moyenne nulle sur l'énergie finale. L'onde progressive directe, si sa vitesse de phase est très proche de c et donc de la vitesse des électrons, va « porter » le faisceau.

Un des accélérateurs linéaires à électrons les plus connus est le SLAC qui est maintenant utilisé en collisionneur e^+e^- (SLC). Il est constitué de 960 sections de 3m. Chaque section est un guide d'onde à iris d'un diamètre de 8 cm, l'ouverture des iris étant de 2 cm.

Chapitre 5 Théorie des accélérateurs circulaires

Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la particule ne passe qu'une fois dans les accélérateurs linéaires, ce qui limite fortement l'énergie finale. Cependant, pour les particules chargées la force de Lorentz nous montre qu'en associant au champ électrique un champ magnétique il est possible de courber la trajectoire. Donc un volume fermé peut contenir les particules que l'on accélère. C'est le principe utilisé dans les accélérateurs circulaires. Si la trajectoire est bien contrôlée, la particule passera plusieurs fois dans le même espace accélérateur, ce qui est non négligeable en terme de coût. Cependant pour courber la trajectoire il faut utiliser de puissants aimants, ce qui représente une complication supplémentaire lors de la construction d'un accélérateur circulaire. Ce chapitre sera consacré à l'étude du mouvement des particules dans les accélérateurs circulaires et aux phénomènes mis en jeu (voir également cours de **P.Germain** au CERN pour les démonstrations complètes) . Les relations obtenues seront appliquées dans les chapitres suivants consacrés aux cyclotrons, synchrotrons et collisionneurs.

Particules de références

Dans un premier temps, considérons un champ magnétique perpendiculaire au plan de notre accélérateur circulaire. Ce plan est par définition le plan médian. La trajectoire sera donc inscrite dans ce plan. En l'absence d'accélération, les particules injectées dans l'accélérateur avec une impulsion non nulle vont décrire une orbite circulaire fermée dans ce plan: c'est la trajectoire de référence pour cette impulsion (cercle rouge sur la figure). En présence d'un champ électrique tangent à l'orbite de référence l'énergie de la particule augmente mais la trajectoire reste dans le plan médian (cercle en pointillés). Le gain en énergie est assez faible à chaque tour et on considère que la trajectoire reste quasiment fermée.

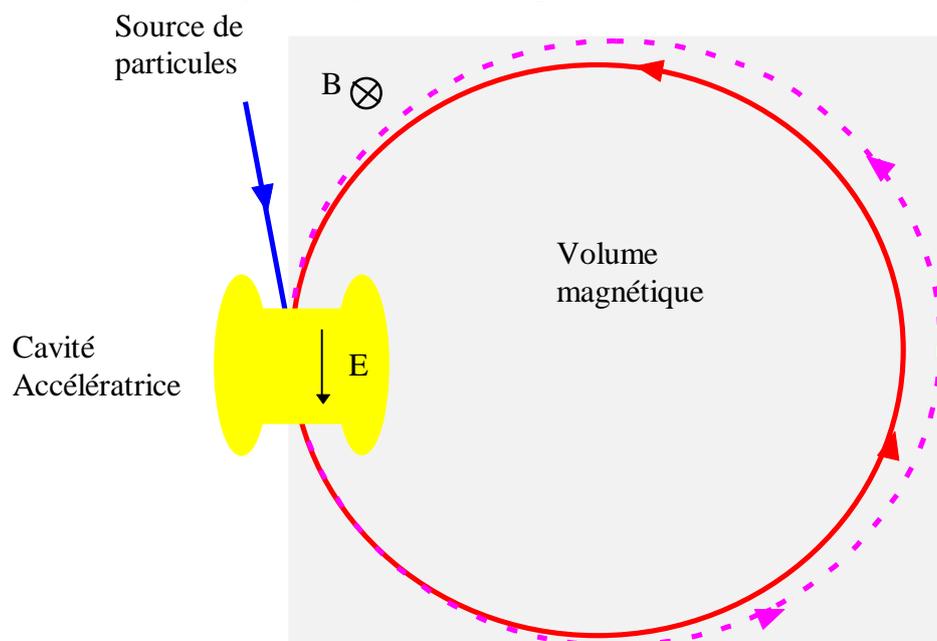


Figure 31: Trajectoires des particules dans un champ magnétique constant.

Nous allons maintenant déterminer l'énergie des particules de référence, le gain en énergie à chaque tour ainsi que la fréquence de révolution en fonction des paramètres de l'accélérateur. Mais avant, quelques rappels élémentaires seront utiles.

L'énergie E d'une particule s'écrit :

$$E = E_0 + E_c$$

avec $E_0 = m_0 c^2$ où m_0 est la masse au repos de la particule

et $E_c = (\gamma - 1)m_0 c^2$ est l'énergie cinétique de la particule. On utilisera parfois la notation:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

où m est la masse relativiste de la particule ($m = \gamma m_0$).

Il est intéressant de connaître l'énergie d'une particule qui tourne dans un accélérateur circulaire de rayon R et dont le champ magnétique moyen tout au long de l'orbite est B . L'énergie d'une particule étant donnée par:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Il faut déterminer p l'impulsion de la particule E_0 étant connue ($E_0 = m_0 c^2$). La force de Lorentz s'écrit:

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{elec} + \vec{v} \times \vec{B})$$

or $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

on en déduit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E}_{elec} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (30)$$

De plus, on peut définir un repère lié à la particule en mouvement comme celui représenté sur la figure 32.

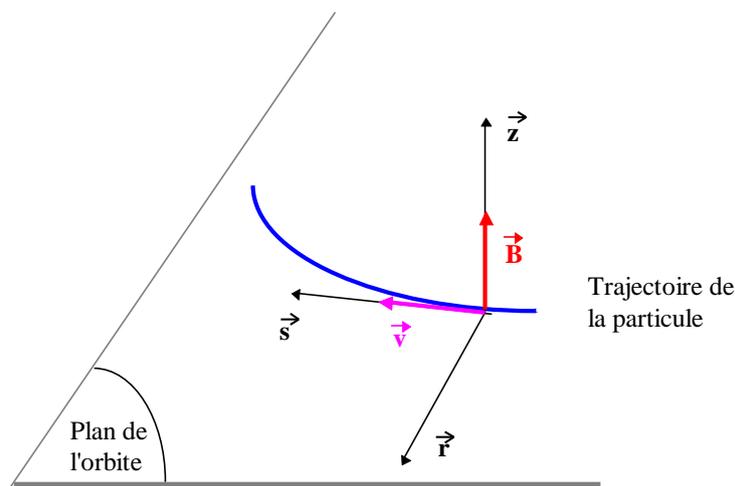


Figure 32: Définition du repère mobile lié à la particule.

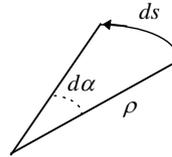
La composante de la force de Lorentz due au champ magnétique s'applique suivant l'axe r et par définition de ce repère la vitesse v de la particule est toujours dirigée suivant s . Ceci permet d'écrire $\vec{p} = p\vec{s}$. Le champ électrique, quant à lui est aussi dirigé suivant s donc l'équation du mouvement devient:

$$\frac{d(p\vec{s})}{dt} = qE_{elec}\vec{s} + qvB\vec{r} \quad (31)$$

$$\frac{dp}{dt}\vec{s} + p\frac{d\vec{s}}{dt} = qE_{elec}\vec{s} + qvB\vec{r}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{s}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\vec{r} = -\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{r}$$

avec $\frac{ds}{dt} = v$ et par définition de l'arc $ds = \rho d\alpha$



donc $\frac{d\vec{s}}{dt} = -\frac{v}{\rho}\vec{r}$ ce qui permet d'écrire l'équation du mouvement en projetant sur les axes s et r :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = qE_{elec} \\ p = q\rho B \end{cases}$$

On obtient une forme plus générale de l'impulsion en intégrant sur un tour ($ds = \rho d\alpha \Rightarrow \rho \rightarrow R, ds \rightarrow 2\pi R$ et $d\alpha \rightarrow 2\pi$) et en considérant que sur un tour l'accroissement de p est petit:

$$p = qBR$$

L'énergie de la particule s'écrit:

$$E^2 = E_0^2 + (qBR)^2 c^2 \quad (32)$$

De cette importante relation on tire comme conclusions:

- Pour un accélérateur de rayon R et une particule de masse au repos m_0 et de charge q l'énergie finale ne dépend que du champ magnétique B .
- Si on désire augmenter l'énergie finale il faut soit augmenter le rayon R (cas des cyclotrons, la trajectoire est alors une spirale) soit augmenter la valeur du champ magnétique (cas des synchrotrons).

On remarquera que lorsque la particule devient relativiste l'énergie de la particule dans l'accélérateur peut se mettre sous la forme:

$$E = qBRc$$

Souvent on exprime l'énergie en MeV , le rayon de la trajectoire en m et le champ en $Tesla$. De plus la charge de la particule s'exprime en fonction du nombre de charge Q par la relation:

$$q = Qe$$

où e est la charge élémentaire (charge de l'électron)

$$\text{donc } E = 300QBR$$

Une autre grandeur intéressante à déterminer dans un accélérateur circulaire, est le gain en énergie par tour exprimé en fonction des paramètres de la machine. Nous venons de voir qu'il fallait faire varier soit le rayon de la trajectoire soit le champ. Dans ces conditions en dérivant la relation 32, on obtient:

$$2E\delta E = 2(qBRc) \cdot qc(R\delta B + B\delta R)$$

or on peut écrire:

$$\begin{aligned}(qBRc) \cdot qc &= pc \cdot qc \\ &= qmc^2v\end{aligned}$$

de plus la vitesse s'exprime en fonction du rayon de la trajectoire par $v = \frac{2\pi R}{\delta t}$ pour un tour et on a toujours la relation $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$ car m est la masse relativiste. Finalement la variation de l'énergie par tour, dans le cas général, a pour expression:

$$\delta E = 2\pi Rq(R\dot{B} + B\dot{R})$$

C'est une relation reliant le gain en énergie et les variations des paramètres de l'accélérateur pour y parvenir. Ce gain en énergie est en fait un gain en énergie cinétique E_c , on pourra donc écrire $\delta E = \delta E_c$. On remarquera que l'on peut aussi exprimer δE par:

$$\begin{aligned}2E\delta E &= 2(qBRc) \cdot qc(R\delta B + B\delta R) \\ &= 2(qBRc)^2 \cdot \left(\frac{\delta B}{B} + \frac{\delta R}{R}\right) \\ \delta E &= \frac{E^2 - E_0^2}{E} \left(\frac{\delta B}{B} + \frac{\delta R}{R}\right)\end{aligned}\quad (33)$$

Appliquons maintenant ces relations à deux exemples concrets:

1. Cas des Cyclotrons $\delta B=0$

$$\delta E_c = \frac{E^2 - E_0^2}{E} \frac{\delta R}{R}$$

exprimé en fonction de l'énergie cinétique de la particule devient:

$$\delta E_c = \frac{E_c(E_c + 2E_0)}{E_c + E_0} \frac{\delta R}{R}$$

si l'on se place dans le cas des ions en début d'accélération $E_c \ll E_0$ donc l'expression du gain en énergie se simplifie et devient:

$$\frac{\delta E_c}{E_c} = 2 \frac{\delta R}{R}$$

en début de cycle d'accélération.

2. Cas des Synchrotrons $R = \text{constante}$

$$\delta E = 2\pi RqR\dot{B}$$

$$\delta E_c = 2\pi R^2q\dot{B}$$

La conclusion que l'on tire de cette relation est que si l'on veut un gain en énergie par tour constant, il faut que le champ magnétique augmente linéairement. De plus, dans le chapitre précédent nous avons vu:

$$\delta E_c = qV \sin \varphi_s$$

Donc le choix de φ_s et de V permet de fixer les variations du champ magnétique.

Enfin, le dernier paramètre important qu'il faut fixer est la fréquence de révolution. Bien entendu, c'est cette fréquence de révolution qui va permettre de fixer la fréquence des cavités accélératrices, car au moment où la particule arrivera dans la cavité il doit y avoir un champ accélérateur. Le chapitre précédent a montré qu'il suffisait que la fréquence du champ soit un multiple de la fréquence avec laquelle la particule se présente dans la cavité.

Nous venons de voir que $v = \frac{2\pi R}{\delta t}$ donc:

$$f = \frac{1}{\delta t} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{mvc^2}{2\pi Rmc^2}$$

$$= \frac{c}{2\pi R} \frac{pc}{E}$$

or $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ et $p = qBR$

on obtient la fréquence de révolution:

$$f = \frac{c}{2\pi R} \frac{qBRc}{\sqrt{E_0^2 + (qBRc)^2}} \text{ soit en posant } B_0 = \frac{E_0}{qcR} \text{ et } f_0 = \frac{c}{2\pi R}$$

$$= \frac{f_0 B}{\sqrt{B^2 + B_0^2}}$$

f_0 est la fréquence de révolution lorsque la particule est ultra relativiste c'est à dire lorsque sa vitesse atteint la vitesse de la lumière.

Avec ces quelques relations, en connaissant les conditions d'entrée des particules dans la machine et en fixant l'objectif à atteindre en ce qui concerne l'énergie, il est possible de définir un accélérateur circulaire.

Etude des Oscillations (Particules réelles)

Les principales grandeurs étant maintenant connues, les paramètres de l'accélérateur étant fixés, il faut maintenant étudier le mouvement des particules réelles dans la machine. Les particules réelles sont celles qui ont de petits mouvements transversaux et longitudinaux autour de la particule de référence. En ce qui concerne l'accélération, au chapitre précédent, le principe de la stabilité de phase avait été rapidement abordé. L'étude des mouvements longitudinaux dans l'accélérateur circulaire permettra de revenir sur cette notion. Dans un premier temps, nous allons étudier les mouvements transversaux des particules autour de la particule de référence. La connaissance de ces oscillations, appelées oscillations betatroniques, est importante, car elle permet de dimensionner la chambre à vide.

Oscillations Betatroniques

Les oscillations betatroniques sont séparées en deux catégories: Les oscillations axiales et les oscillations radiales. La figure 33 représente chacune d'elles.

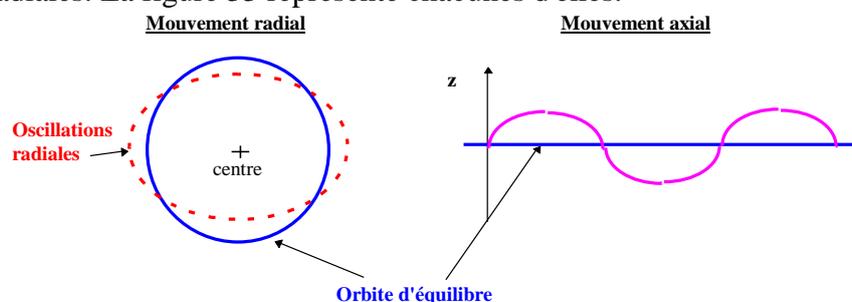


Figure 33: A gauche définition du mouvement radial (variation d'orbite). A droite définition du mouvement axial (oscillations dans le plan vertical)

Le repère défini dans le paragraphe précédent est toujours valable. L'étude des oscillations betatroniques, revient à étudier le mouvement des particules suivant les axes r et z en fonction de s ou du temps (figure 34). Cependant, le vecteur impulsion, ou vitesse, de la particule réelle n'est plus confondu avec s .

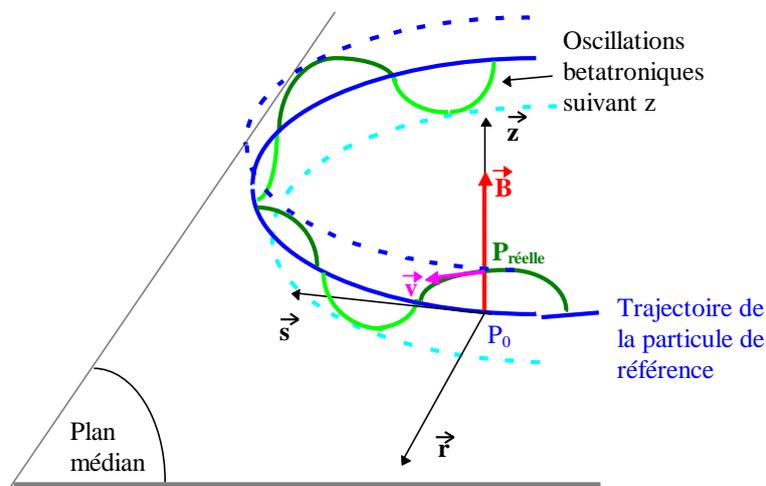


Figure 34: Exemple d'oscillations betatroniques autour de l'orbite de référence (Pour simplifier la figure, seules des oscillations suivant z ont été représentées. Dans ce cas, les particules passent alternativement au dessus et au dessous du plan de référence ou plan médian). La projection de la position de la particule réelle sur l'orbite de référence est notée P_0 .

Avant de commencer cette étude, certaines hypothèses doivent être énoncées:

- L'amplitude des oscillations est supposée petite par rapport à leur longueur d'onde. Cela permet de se placer dans un cas réaliste avec un tube à vide de diamètre raisonnable:

$$v_s \approx v \quad \text{et} \quad v_r \ll v_s, \quad v_z \ll v_s$$

- Les mouvements étant petits, les termes d'ordre supérieur à un seront négligés.
- L'énergie des particules est considérée comme pratiquement constante sur une révolution. Elle est donc considérée comme constante sur une période d'oscillations betatroniques.
- Il y a de nombreuses oscillations transversales au cours d'une oscillation longitudinale, autrement dit la période des oscillations betatroniques est petite devant celle des oscillations transversales.
- Le champ magnétique est constant et égal à B_0 uniquement sur la trajectoire de référence.

L'énergie des particules étant constante sur une période d'oscillation betatronique, localement l'équation du mouvement 30 du à la force de Lorentz s'écrit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La projection de cette équation sur les axes du repère devient plus compliquée car:

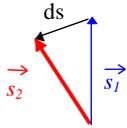
$$\vec{p} = p_r \cdot \vec{r} + p_z \cdot \vec{z} + p_s \cdot \vec{s}$$

et

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp_r}{dt} \vec{r} + p_r \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{dp_z}{dt} \vec{z} + p_z \frac{d\vec{z}}{dt} + \frac{dp_s}{dt} \vec{s} + p_s \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Sachant d'après nos hypothèses que:

$\frac{d\vec{z}}{dt} = 0$ car le vecteur z suivant lequel est dirigé le champ magnétique reste perpendiculaire au mouvement. De plus $\frac{d\vec{s}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\vec{r} = -\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{r} = -\frac{1}{\rho}v\vec{r}$



car la variation de ds au cours du temps se fait suivant r et de la même manière:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{\rho}v\vec{s}$$

on écrit finalement:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{dp_r}{dt} - p_s \frac{v}{\rho}\right)\vec{r} + \frac{dp_z}{dt}\vec{z} + \left(p_r \frac{v}{\rho} + \frac{dp_s}{dt}\right)\vec{s}$$

souvent on préfère utiliser la variables s , distance sur l'orbite, plutôt que le temps. On effectue

donc les permutations suivantes : $\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}v$ et on pose $\frac{dr}{ds} = r'$ donc $\frac{dp_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = mv^2x''$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{ds^2}v^2 \quad \frac{d^2r}{ds^2} = r''$$

ce qui permet d'obtenir l'expression :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (mv^2r'' - mv_s \frac{v}{\rho})\vec{r} + mv^2z''\vec{z} + (mv_r \frac{v}{\rho} + mv^2s'')\vec{s}$$

Il reste l'autre membre de l'équation :

$$q\vec{v} \times \vec{B} = qv_s B_z \vec{r} + qv_s B_r \vec{z} + q(v_r B_z - v_z B_r)\vec{s}$$

On s'intéresse au mouvement suivant r et z ce qui nous permet d'écrire, sachant que $v_s \approx v$, le système:

$$\begin{cases} mv^2r'' - m\frac{v^2}{\rho} = -qvB_z \\ mv^2z'' = qvB_r \end{cases}$$

on préfère utiliser l'impulsion plutôt que la vitesse ($p=mv$) donc:

$$\begin{cases} r'' - \frac{1}{\rho} + \frac{qB_z}{p} = 0 \\ z'' - \frac{qB_r}{p} = 0 \end{cases}$$

Il faut se rappeler que dans ces expressions toutes les grandeurs sont locales, c'est à dire qu'elles ne sont valables qu'au point où se trouve la particule. Il est intéressant de les remplacer par les valeurs à la position de référence correspondante (soit en P_0). De plus, les équations de maxwell en l'absence de champ électrique nous donnerons des relations importantes comme:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

Finalement, on obtient les relations:

$$\begin{cases} r'' - \frac{1}{\rho} + \frac{qB_0}{p} + \frac{q}{p} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_0 = 0 \\ z'' - \frac{q}{p} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_0 = 0 \end{cases}$$

On introduit alors l'indice de champ défini par:

$$n = -\frac{\rho}{B_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_0$$

Au paragraphe précédent nous avons vu de plus que $p = qB\rho$ ce qui permet d'obtenir les équations des petits mouvements transversaux autour de la trajectoire de référence dans le cas général:

$$\begin{cases} r'' - \frac{1-n}{\rho_0^2} r = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{P_0} \\ z'' - \frac{n}{\rho_0^2} z = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit en fonction des pulsations des oscillations betatroniques:

$$\begin{cases} \ddot{r} + \left(\omega_\beta^H \right)^2 r = C \quad \text{avec } \omega_\beta^H = \frac{v}{\rho} \sqrt{1-n} \\ \ddot{z} + \left(\omega_\beta^V \right)^2 z = 0 \quad \text{avec } \omega_\beta^V = \frac{v}{\rho} \sqrt{n} \end{cases}$$

Donc finalement, les équations du mouvement sont de la forme:

$$y'' + K(s)y = D \quad (34)$$

avec

$$y = r \quad , \quad K_r(s) = \frac{1-n}{\rho^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{P}$$

$$y = z \quad , \quad K_z(s) = \frac{n}{\rho^2} \quad \text{et} \quad D = 0$$

On démontre que l'indice de champ peut aussi se mettre sous la forme:

$$n = -\frac{\frac{\Delta B}{B}}{\frac{r}{\rho}}$$

Physiquement l'indice de champ représente les variations du champ magnétique lorsque l'on se déplace suivant l'axe r d'une petite quantité par rapport au rayon de l'orbite.

- lorsque $0 < n < 1$ la machine est stable et à focalisation faible, les racines des équations sont réelles.
- lorsque $n > 1$ la machine est dite à focalisation forte, les racines des équations sont exponentielles.

Maintenant, il faut déterminer les conséquences de ces équations sur les éléments de l'accélérateur que sont les aimants. Partons des expressions de $K(s)$:

$$K_r(s) = \frac{1-n}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

$$K_z(s) = \frac{n}{\rho^2} = -\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_r}{\partial z}$$

On peut remarquer que:

- $\frac{1}{\rho^2}$ représente la composante dipolaire du champ, c'est à dire celle qui courbe la trajectoire.
- $\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_z}{\partial r}$ représente la partie focalisante.
- $-\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_r}{\partial z}$ représente la partie défocalisante

Prenons l'exemple d'un quadripôle pur. La composante dipolaire est nulle car $\rho \rightarrow \infty$, Le champ sur l'axe est nul ($B_0=0$). De plus dans ce cas on peut remplacer r par x , car le mouvement est rectiligne.

$$K_x(s) = +\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$K_z(s) = -\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

cela correspond, à une configuration de champ représentée sur la figure 35.

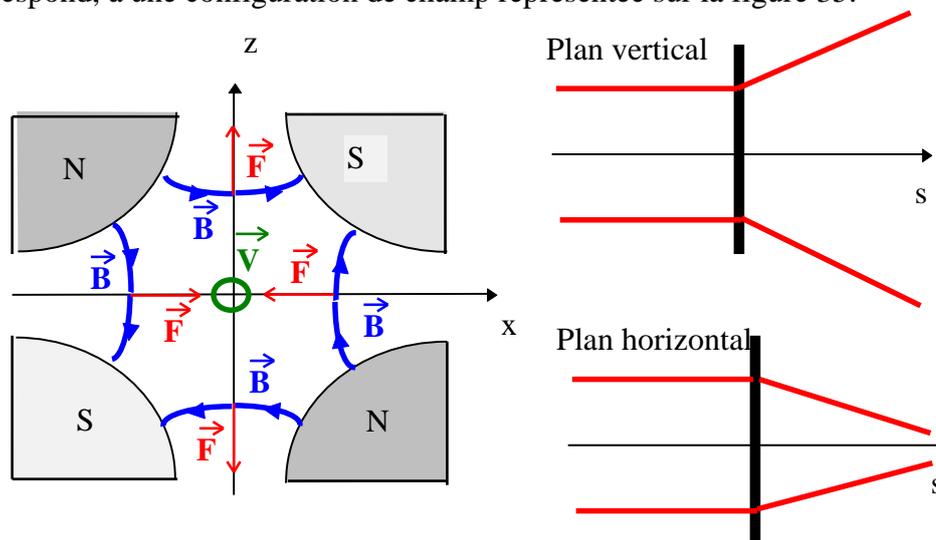


Figure 35: configuration du champ dans un quadripôle focalisant.

Par définition, un quadripôle est dit **focalisant**, s'il est focalisant dans le plan **horizontal**.

Avec l'exemple précédent pour obtenir un quadripôle défocalisant, il faut soit inverser le sens du courant dans les pôles, soit tourner l'aimant de 90° autour de son axe (figure 36).

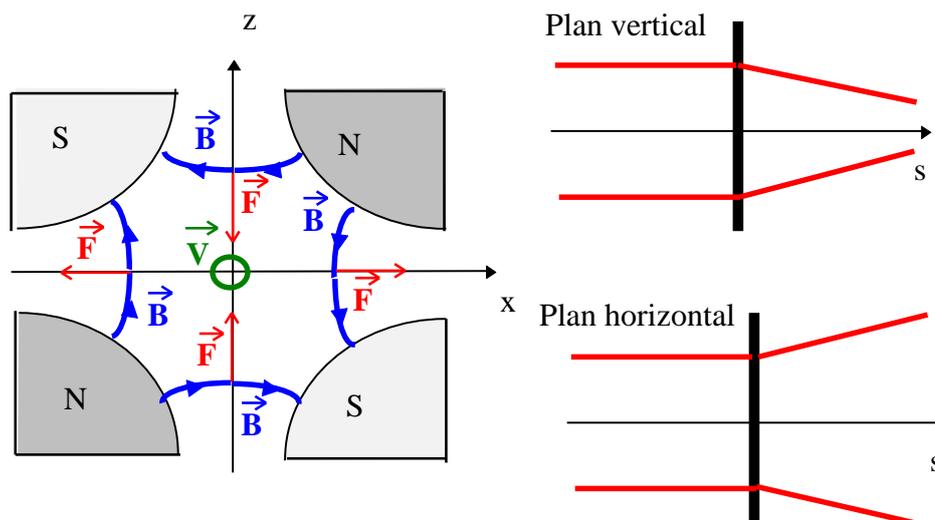


Figure 36: configuration du champ dans un quadripôle défocalisant.

Pour conclure, la valeur de K (positif ou négatif) permet de définir l'élément magnétique considéré. Il faut également bien se souvenir, qu'il y a dans le cas général deux valeurs de K suivant l'axe où l'on se place.

Matrice de transfert

L'équation 34 est en fait une forme particulière de:

$$y'' + J(s)y' + K(s)y = D$$

où y est une intégrale quelconque. On montre que si on considère les intégrales du type :

$$\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$$

on peut déterminer ces intégrales en un point quelconque s à partir des conditions initiales en s_0 grâce à la matrice de passage:

$$\vec{y}(s) = M_{s \rightarrow s_0} \vec{y}(s_0)$$

En partant de l'équation 34, dans le cas d'un secteur magnétique focalisant $K > 0$, les solutions peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y = C_1 \sin \sqrt{K}s + C_2 \cos \sqrt{K}s \\ y' = C_1 \sqrt{K} \cos \sqrt{K}s - C_2 \sqrt{K} \sin \sqrt{K}s \end{cases}$$

connaissant les conditions initiales, c'est à dire les valeurs de y et y' en s_0 on en déduit C_1 et C_2 .

$$\begin{cases} y_0 = C_1 \sin \sqrt{K}s_0 + C_2 \cos \sqrt{K}s_0 \\ y_0' = C_1 \sqrt{K} \cos \sqrt{K}s_0 - C_2 \sqrt{K} \sin \sqrt{K}s_0 \end{cases}$$

donc:

$$y_0 \sqrt{K} \sin \sqrt{K}s_0 + y_0' \cos \sqrt{K}s_0 = C_1 \sqrt{K} (\sin^2 \sqrt{K}s_0 + \cos^2 \sqrt{K}s_0)$$

$$y_0 \sqrt{K} \cos \sqrt{K}s_0 - y_0' \sin \sqrt{K}s_0 = C_2 \sqrt{K} (\sin^2 \sqrt{K}s_0 + \cos^2 \sqrt{K}s_0)$$

$$C_1 = y_0 \sin \sqrt{K}s_0 + \frac{y_0'}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}s_0$$

$$C_2 = y_0 \cos \sqrt{K}s_0 - \frac{y_0'}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s_0$$

soit en remplaçant dans l'expression de $\vec{y}(s)$:

$$\begin{cases} y = y_0 \cos \sqrt{K}(s - s_0) + \frac{y_0'}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}(s - s_0) \\ y' = -y_0 \sqrt{K} \sin \sqrt{K}(s - s_0) + y_0' \cos \sqrt{K}(s - s_0) \end{cases}$$

on pose alors $\phi = \sqrt{K}(s - s_0)$ et obtient la matrice de transfert d'un secteur focalisant :

$$F = M_{s_0 \rightarrow s} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \phi \\ -\sqrt{K} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

si on remplace $s - s_0$ par l et que $l \rightarrow 0$, on est alors dans le cas d'une lentille magnétique mince

$\cos \phi \rightarrow 1$ et $\sin \phi = \phi = \sqrt{K}l$ donc $\frac{\sin \sqrt{K}l}{\sqrt{K}} \rightarrow l$ et $\sqrt{K} \sin \sqrt{K}l \rightarrow Kl$

et la matrice de transfert va s'écrire :

$$f = M_{s_0 \rightarrow s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Kl & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un secteur magnétique défocalisant on a $K < 0$:

$$\begin{cases} y = C_1 sh \sqrt{-K}s + C_2 ch \sqrt{-K}s \\ y' = C_1 \sqrt{-K} ch \sqrt{-K}s + C_2 \sqrt{-K} sh \sqrt{-K}s \end{cases}$$

le calcul est alors le même que dans le cas précédent :

$$\begin{cases} y_0 = C_1 sh \sqrt{-K}s_0 + C_2 ch \sqrt{-K}s_0 \\ y_0' = C_1 \sqrt{-K} ch \sqrt{-K}s_0 + C_2 \sqrt{-K} sh \sqrt{-K}s_0 \end{cases}$$

donc:

$$y_0 \sqrt{-K} sh \sqrt{-K}s_0 - y_0' ch \sqrt{-K}s_0 = C_1 \sqrt{-K} (sh^2 \sqrt{-K}s_0 + ch^2 \sqrt{-K}s_0)$$

$$y_0 \sqrt{-K} ch \sqrt{-K}s_0 - y_0' sh \sqrt{-K}s_0 = C_2 \sqrt{-K} (sh^2 \sqrt{-K}s_0 - ch^2 \sqrt{-K}s_0)$$

$$C_1 = -y_0 sh \sqrt{-K}s_0 + \frac{y_0'}{\sqrt{-K}} ch \sqrt{-K}s_0$$

$$C_2 = y_0 ch \sqrt{-K}s_0 - \frac{y_0'}{\sqrt{-K}} sh \sqrt{-K}s_0$$

soit en remplaçant dans l'expression de $\vec{y}(s)$:

$$\begin{cases} y = y_0 ch \sqrt{-K}(s - s_0) + \frac{y_0'}{\sqrt{-K}} sh \sqrt{-K}(s - s_0) \\ y' = y_0 \sqrt{-K} sh \sqrt{-K}(s - s_0) + y_0' ch \sqrt{-K}(s - s_0) \end{cases}$$

on pose alors $\phi = \sqrt{-K}(s - s_0)$ et obtient la matrice de transfert d'un secteur focalisant :

$$D = M_{s_0 \rightarrow s} = \begin{pmatrix} ch \phi & \frac{1}{\sqrt{-K}} sh \phi \\ \sqrt{-K} sh \phi & ch \phi \end{pmatrix}$$

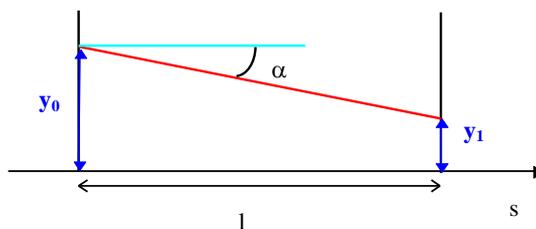
dans le cas d'une lentille magnétique mince défocalisante

$ch\phi \rightarrow 1$ et $sh\phi = \phi = \sqrt{-Kl}$ donc $\frac{sh\sqrt{-Kl}}{\sqrt{-K}} \rightarrow l$ et $\sqrt{-K} \sin\sqrt{-Kl} \rightarrow Kl$

et la matrice de transfert va s'écrire :

$$d = M_{s_0 \rightarrow s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Kl & 1 \end{pmatrix}$$

Prenons maintenant le cas d'une section droite sans champ, qui sert donc qu'à assurer le transport du faisceau :



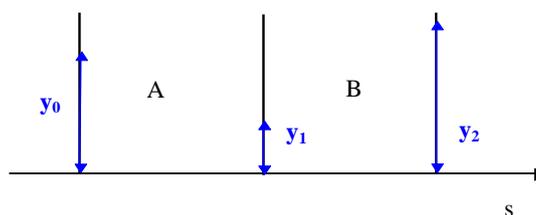
donc on a le système d'équations :

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + l \tan \alpha \\ y_1' = y_0' \end{cases} \quad \text{soit } y_0' = \frac{y_1 - y_0}{s_1 - s_0} = \frac{y_1 - y_0}{l} \quad \text{donc } y_1 = y_0 + l y_0'$$

La matrice de transfert s'écrit alors :

$$O = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc, connaissant toutes les matrices de transfert, calculer les mouvements du faisceau tout au long de l'accélérateur:



avec $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ et $y_1 = Ay_0$ et $y_2 = By_1 = BAy_0$

La matrice de transfert générale va donc s'écrire :

$$M = BA \quad \text{avec } m_{ik} = \sum_{l=1}^2 b_{il} a_{lk}$$

Equation de Hill. Théorème de Floquet

Dans le cas où la trajectoire est fermée ou quasiment fermée, la fonction $K(s)$ dans l'équation 34 devient périodique : l'équation est alors appelée équation de Hill et les solutions sont dites de Floquet .

Si il y a N oscillations betatroniques de période L par tour, alors la fonction K vérifie la relation :

$$K(s+L) = K(s)$$

les solutions particulières de $y'' + K(s)y = 0$ sont alors:

$$y_1(s+L) = m_1 y_1(s)$$

$$y_2(s+L) = m_2 y_2(s)$$

où m_1 et m_2 sont des constantes et sont aussi les valeurs propres de l'équation de Hill.

y_1 correspond à la solution pour le point (1,0) et y_2 correspond à la solution pour le point (0,1). De plus, m_1 et m_2 vérifient l'égalité d'unicité:

$$m_1 m_2 = 1$$

de plus on a la relation:

$$m_1 + m_2 = \text{tr}(M) = m_{11} + m_{22}$$

donc en fait $\begin{cases} m_1 = e^{i\mu} \\ m_2 = e^{-i\mu} \end{cases}$ et donc $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) = \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{2} = \cos \mu$

donc $\begin{cases} y_1(s+L) = y_1(s)e^{i\mu} \\ y_2(s+L) = y_2(s)e^{-i\mu} \end{cases}$ où μ est caractéristique de l'équation de Hill.

On définit également:

$$\frac{1}{2}(m_{11} - m_{22}) = \alpha \sin \mu$$

$$m_{12} = \beta \sin \mu$$

$$m_{21} = -\gamma \sin \mu$$

où α, β, γ sont des fonctions périodiques de s avec une période égale à L

Théorème de Floquet:

Les deux intégrales particulières de l'équation de Hill ayant les propriétés de :

$$y_1(s+L) = y_1(s)e^{i\mu}$$

$$y_2(s+L) = y_2(s)e^{-i\mu}$$

sont nécessairement de la forme:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= e^{i\mu \frac{s}{L}} p_1(s) \\ y_2(s) &= e^{-i\mu \frac{s}{L}} p_2(s) \end{aligned} \quad \text{avec les fonctions périodiques} \quad \begin{aligned} p_1(s+L) &= p_1(s) \\ p_2(s+L) &= p_2(s) \end{aligned}$$

La matrice de transfert s'écrit donc sous la forme:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

c'est la définition de la matrice de Twiss

avec les relations importantes:

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$$

on remarquera que la matrice M peut aussi s'écrire sous la forme:

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu$$

et en posant: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

Nombre d'onde

Avant d'appliquer, les relations déterminées précédemment, il faut définir différentes grandeurs.

Une période ou une maille d'un accélérateur circulaire est en fait une étendue angulaire comportant différents éléments (dipôle, quadripôle focalisant, section droite, etc.) Une maille a une étendue angulaire de μ , c'est à dire que sur la figure l'on passe de la première maille à la seconde lorsque l'on a progressé de μ

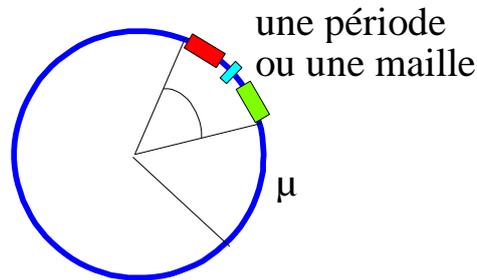


Figure 37

μ est la phase de l'oscillation betatronique. On définit le nombre d'onde par ν ou Q :

$$\nu = \frac{\mu N}{2\pi}$$

C'est le nombre d'oscillations betatroniques par tour. Il faut se rappeler qu'il y a en fait deux nombres d'onde ν_r et ν_z qui correspondent aux oscillations horizontales et verticales.

Pour avoir des solutions réelles et physiquement réalisables, il faut vérifier la condition de stabilité:

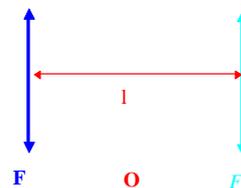
$$-1 < \cos \mu < 1$$

Donc la conclusion importante que l'on tire de cette relation, est qu'il faut que $|\cos \mu| < 1$ ce qui permet de conserver des valeurs bornées pour y et y' et donc avoir une stabilité transversale du faisceau. De plus comme $\cos \mu$ est par définition la demi-trace de la matrice de transfert dans le plan considéré (horizontal i.e. suivant r ou vertical i.e. suivant z) on écrira:

La stabilité de phase transversale du faisceau dans un accélérateur circulaire est obtenue si les demi-traces des matrices de transfert, correspondant à une période, sont comprises entre -1 et +1 .

Les conséquences de cette condition sur la réalisation de la machine sont importantes comme le montre l'étude de quelques mailles simples.

Etude de la maille OF



La matrice de transfert va s'écrire:

$$OF = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \phi \\ -\sqrt{K} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$OF = \begin{pmatrix} \cos \phi - l\sqrt{K} \sin \phi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \phi + l \cos \phi \\ -\sqrt{K} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

avec toujours $\phi = \sqrt{K}(s - s_0)$ et par conséquent:

$$\cos \mu = \frac{1}{2} (\cos \phi - l\sqrt{K} \sin \phi + \cos \phi)$$

$$\cos \mu = \cos \phi - \frac{l\sqrt{K} \sin \phi}{2}$$

avec K :
$$\begin{cases} K_r(s) = \frac{1-n}{\rho^2} \\ K_z(s) = \frac{n}{\rho^2} \end{cases}$$
, si de plus on suppose que K est réel et la maille est focalisante $K > 0$,

la condition de stabilité devient.

$$-1 < \cos \phi - \frac{l\sqrt{K} \sin \phi}{2} < 1$$

$$\frac{2(\cos \phi - 1)}{\sqrt{K} \sin \phi} < l < \frac{2(\cos \phi + 1)}{\sqrt{K} \sin \phi}$$

de plus si ϕ est petit et positif $\frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} = \frac{1 - \frac{\phi^2}{2} - 1}{\phi} = -\frac{\phi}{2} < 0$ donc il ne reste plus que la condition:

$$l < \frac{2(\cos \phi + 1)}{\sqrt{K} \sin \phi}$$

Comparons maintenant μ et ν :

on part de $\cos \mu = \cos \phi - \frac{l\sqrt{K} \sin \phi}{2}$ et on peut remarquer que:

$\cos(\alpha + \varepsilon) = \cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon \approx \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha$ donc on pose $\varepsilon = \frac{l\sqrt{K}}{2}$ et on obtient alors:

$$\begin{aligned} \mu &= \phi + \frac{l\sqrt{K}}{2} \\ &= \phi \left(1 + \frac{l\sqrt{K}}{2\phi}\right) \\ &\approx \phi \sqrt{1 + \frac{l\sqrt{K}}{\phi}} \end{aligned}$$

de plus comme $\phi = \sqrt{K}(s - s_0) = \sqrt{K}\Delta s$ et que $\Delta s = 2\pi\rho / N$, ρ étant la longueur de l'arc et N le nombre de fois où l'on tourne de cet arc.

Donc on peut écrire:

$$\frac{\sqrt{K}}{\phi} = \frac{1}{\Delta s} = \frac{N}{2\pi\rho}$$

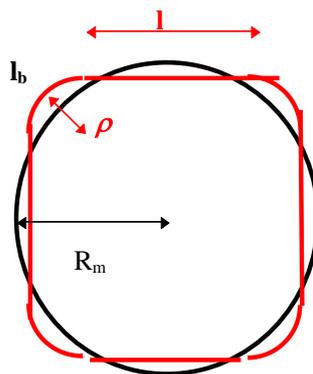


Figure 38

La figure ci-dessus représente schématiquement la machine: Le dipôle courbe la trajectoire en imposant le rayon de courbure ρ sur la longueur l_b . l est la longueur de la section droite. R_m est le rayon moyen de la machine. Cela permet d'écrire:

$$\begin{aligned} 2\pi R_m &= N(l_b + l) \\ &= 2\pi\rho + Nl \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{R_m}{\rho} = 1 + \frac{Nl}{2\pi\rho} = 1 + \frac{l\sqrt{K}}{\phi} = 1 + k$$

où $k+1$ est le facteur circonférentiel de la machine.

$$\begin{aligned} \mu &\approx \phi\sqrt{1+k} \\ v &= \frac{\mu N}{2\pi} \approx \frac{N\phi}{2\pi}\sqrt{1+k} \end{aligned}$$

comme $\phi = \sqrt{K}(s - s_0) = \sqrt{K}\Delta s = \frac{2\pi}{N}\sqrt{K}\rho$ on peut écrire:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{1-n}{\rho^2} & \text{et} & & \phi_r &= \frac{2\pi}{N}\sqrt{1-n} & \text{d'où} & & v_r &= \sqrt{(1-n)(1+k)} \\ K_z &= \frac{n}{\rho^2} & & & \phi_z &= \frac{2\pi}{N}\sqrt{n} & & & v_z &= \sqrt{n(1+k)} \end{aligned}$$

On peut refaire ces calculs pour tous les types de mailles utilisées dans les accélérateurs

Pour la maille FD, c'est à dire une succession de deux quadripôles, on obtient:

Plan horizontal:

$$\cos \mu_r = \cos \phi_r \operatorname{ch} \varphi_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_r}{\phi_r} - \frac{\phi_r}{\varphi_r} \right) \sin \phi_r \operatorname{sh} \varphi_r$$

$$\begin{aligned} \phi_r &= \frac{2\pi}{N} \frac{\sqrt{n_2}}{\rho} \\ \text{avec} & & \varphi_r &= \frac{2\pi}{N} \frac{\sqrt{n_1}}{\rho} \end{aligned}$$

où n_1 et n_2 sont les indices de champ des deux quadripôles.

Plan vertical:

$$\cos \mu_z = \cos \phi_z \operatorname{ch} \phi_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_z}{\phi_z} - \frac{\phi_z}{\phi_z} \right) \sin \phi_z \operatorname{sh} \phi_z$$

Emittance et Acceptance

Comme il y a deux plans de phase transversaux , horizontal et vertical, il y aura deux emittances.

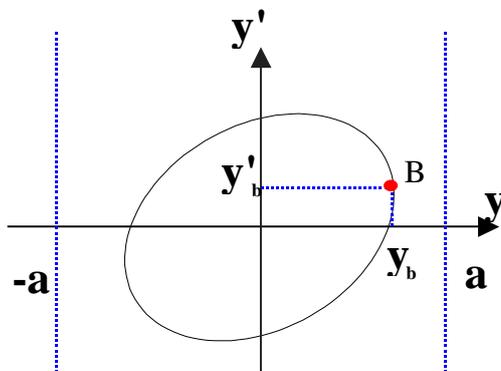
On montre que y et y' vérifient la relation:

$$\gamma y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 = R_0$$

où R_0 est constant (déterminé à partir des valeurs y_0 et y_0'). C'est une ellipse dans le plan de phase considéré et sa surface est πR_0 . Donc le point représentatif de la particule y et y' va parcourir cette ellipse en partant de $y_0 y_0'$. Attention cependant comme α , β et γ sont des fonctions de s l'ellipse se déforme au cours du temps mais sa surface reste πR_0 .

Définition pratique de l'émittance

Si les points représentatifs y et y' de 90% des particules du faisceau sont contenus dans l'ellipse de surface πR_0 cette surface est par définition l'émittance.



A partir des conditions particulières au point B ($\frac{dy}{dy'} = 0$), on obtient une relation reliant l'émittance du faisceau et la position de B:

$$y_b = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \sqrt{\beta(s)}$$

A partir des matrices de transfert d'un accélérateur circulaire on peut calculer les valeurs maximum de β . Si on injecte dans cette machine un faisceau de particules d'emittance connues, ε_r et ε_z , on obtient les demi ouvertures nécessaires pour accepter le faisceau par:

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \sqrt{\beta_{\max}}$$

Définition pratique de l'acceptance

L'acceptance est l'émittance maximum à l'injection du faisceau. Une valeur typique est de 30 π mm x mrad.

Ces deux grandeurs sont importantes car elles vont fixée l'intensité du faisceau qu'il sera possible d'accélérer ainsi que les dimensions de la chambre à vide.

Influence de la dispersion en énergie

Jusqu'à maintenant, l'énergie des particules a toujours été considéré comme constante et égale à p . Or on sait que les particules acceptées par la machine ont une impulsion qui vérifie:

$$p = p_0 + \Delta p$$

Δp est considéré comme constant.

Cela entraîne aussi une modification de l'orbite telle que :

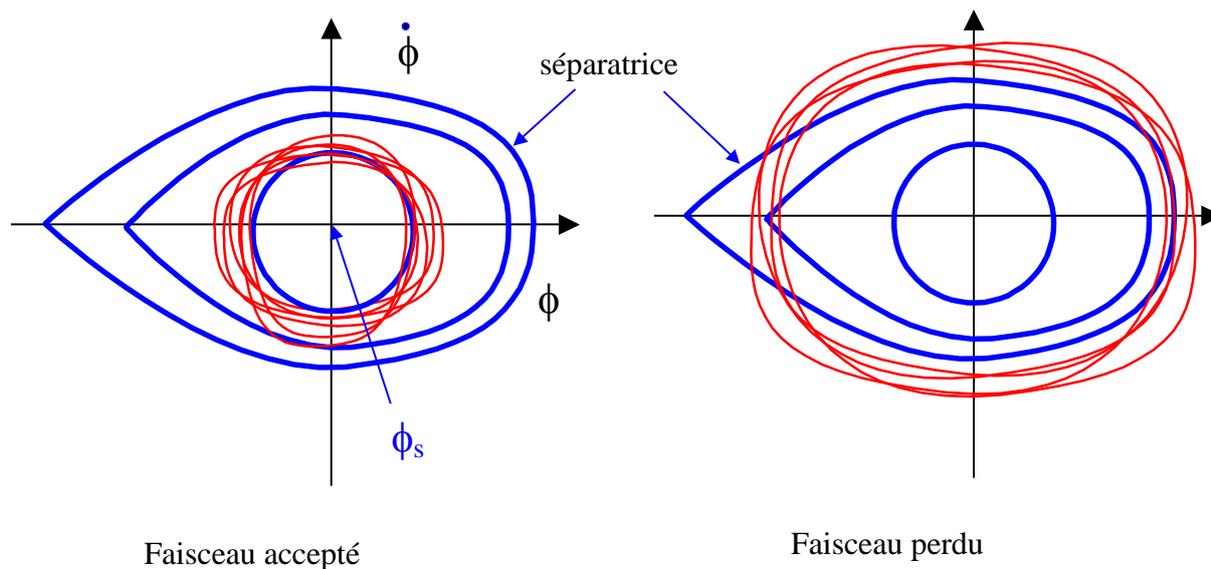
$$r = \rho + x$$

Bien entendu, cette oscillation a des conséquences sur les oscillations du faisceau autour de la trajectoire de référence. En fait il faudra rajouter à l'émittance horizontale un facteur supplémentaire pour tenir compte des mouvements autour de l'orbite de référence. On montre que ce facteur peut s'écrire:

$$\Delta r \approx \frac{r}{v_r^2} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

Oscillations Synchrotroniques

Ce sont les oscillations dues au fait que toutes les particules n'ont pas toutes exactement la même énergie. En effet seules les particules qui passe dans les cavités accélératrices à la phase stable ϕ_s sont synchrones. Elles ont alors une vitesse angulaire Ω_s . On montre que seules les particules dont la phase est à l'intérieur de courbes fermées comme celle représentées ci-dessous (forme de poisson) seront conservées.



Chapitre 6 Cyclotrons

Introduction

Le principe du cyclotron classique est présenté sur la figure 39. A chaque passage dans l'espace séparant les Dees, les particules sont accélérées grâce à un champ électrique généré par un oscillateur HF. Lorsque les particules sont à l'intérieur d'un Dee leur trajectoire est courbe. Quand la trajectoire devient tangente à la circonférence de la chambre à vide, des électrodes de déflexion assurent l'extraction du faisceau. Le nom de Dee pour les électrodes accélératrices vient de la ressemblance de leur forme avec la lettre D.

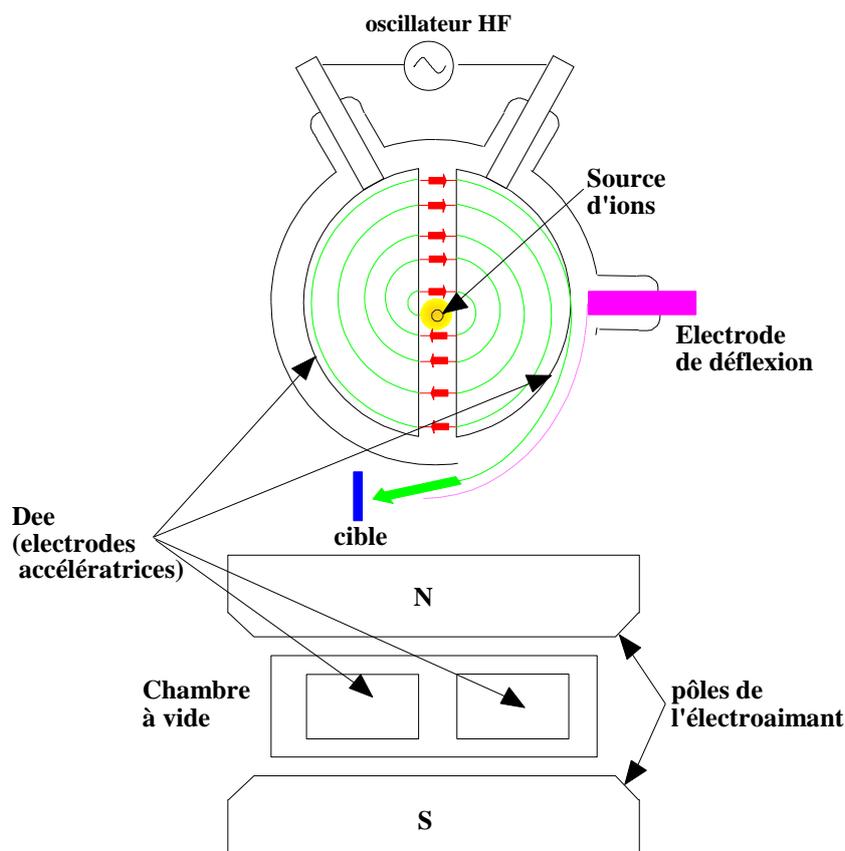


Figure 39: schéma de principe d'un cyclotron classique. Dans ce dispositif le champ magnétique est constant ainsi que la fréquence de la haute tension appliquée aux bornes des électrodes accélératrices.

Dans ce chapitre les relations de base des cyclotrons, ainsi que la justification de leurs limitations seront abordés. L'étude des cyclotrons classiques permettra d'établir les relations de synchronisme. L'influence de l'augmentation de la masse des particules au cours de l'accélération, du fait de l'effet relativiste, permettra de montrer la nécessité d'une variation de fréquence ou de champ pour conserver la relation de synchronisme. Les synchrocyclotrons dans lesquels la fréquence du champ électrique accélérateur décroît au cours du cycle et les cyclotrons isochrones où le champ magnétique augmente avec le rayon de la trajectoire seront alors décrits. On remarquera que dans tous les cas les cyclotrons sont caractérisés par un champ magnétique indépendant du temps.

Fréquence de révolution et énergie

Dans le chapitre précédent, la relation liant l'impulsion de la particule a été établie :

$$p = qB_m R$$

Où B_m est le champ moyen sur l'orbite. Considérons un cyclotron où le champ est constant, indépendant de R . La fréquence de révolution des particules f_p est facilement obtenue car :

$$p = mv$$

$$v = \frac{qB_m R}{m}$$

$$f_p = \frac{v}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{qB_m R}{m}$$

ce qui conduit à la condition d'isochronisme

$$f_p = \frac{qB_m}{2\pi m}$$

Dans le cas où la particule est non relativiste $v \ll c$, $\beta \ll 1$ et $\gamma \sim 1$. La masse est alors $m = m_0$ et la fréquence de révolution f_p peut être considérée comme une constante :

$$f_p = \frac{qB_m}{2\pi m_0}$$

Le cyclotron est alors appelé cyclotron classique (champ constant, particule non relativiste).

L'énergie peut s'écrire sous la forme :

$$E^2 = E_0^2 + (qB_m R)^2 c^2$$

$$E^2 - E_0^2 = Q^2 (300B_m R)^2$$

$$E_c (E_c + 2E_0) = Q^2 (300B_m R)^2$$

on a remplacé la charge q de la particule accélérée par Qe , où Q est le nombre de charge et e la charge électrique élémentaire, et la masse m_0 , par le produit Am_u , A est le nombre de masse et m_u l'unité de masse atomique (931,49 MeV/c²). On obtient finalement :

$$\frac{E_c}{A} \left(\frac{E_c}{A} + 2m_u \right) = \frac{Q^2}{A^2} (300B_m R)^2$$

A titre indicatif, le tableau donne les diamètres en mètre de quelques cyclotrons pour diverses particules et énergies étant donné un champ est de 2 Tesla.

E_c		100 MeV	1 GeV	10 GeV
proton	A=1 Q=1	1,48	5,66	36,3
deuton	A=2 Q=1	2,06	7,26	39
α	A=2 Q=2	1,46	4,86	22

Tableau 4: Diamètre d'un cyclotron en fonction du type de particules et de l'énergie finale. Le champ est fixé à deux Tesla.

On constate rapidement que les énergies accessibles par les cyclotrons, restent de l'ordre du GeV

Cyclotron classique

Dans les cyclotrons classiques le champ magnétique est constant, les particules sont non relativistes, et la fréquence du champ accélérateur est également fixe. Dans une telle machine, il suffit donc de donner au champ électrique accélérateur une fréquence multiple de f_p :

$$f_{RF} = h \cdot f_p \text{ où } h=1,2,3... \text{ est le nombre d'harmoniques}$$

En règle générale, pour des protons, le cyclotron classique peut être utilisé pour des énergies inférieures à 20 MeV. Cet appareil n'est pas du tout intéressant pour des électrons car l'énergie augmentera de plusieurs ordre de grandeur au cours de l'accélération, et la masse relativiste aussi. Pour mémoire le tableau ci-dessous résume les variations de la masse relativiste avec l'augmentation de la vitesse :

	p (GeV/c)	β	γ	γm_0
électron	1	.999	1956	1000
p	1	0.72	1.46	1.371
p	10	0.99	10	10.043

Le principal avantage du cyclotron classique est la possibilité d'avoir un faisceau continu du fait que le synchronisme est assuré indépendamment du rayon de la trajectoire, donc de l'énergie de la particule. En réalité les particules ne peuvent être acceptées et accélérées uniquement quand le champ RF est accélérateur. Du point de vue microscopique, le faisceau n'est donc pas continu car il est le reflet de la structure en temps du champ accélérateur. Cependant, macroscopiquement, il est considéré comme continu surtout si on le compare à celui d'un synchrotron où le temps séparant les paquets peut dépasser la seconde.

C'est une machine de ce type qui a été construite en 1932 par Lawrence et Livingston : ils ont obtenu des protons de 1,2 MeV. Le développement de ces machines a été très rapide puisque en 1958, on comptait déjà 48 cyclotrons classiques opérationnels. Cependant dès 1937 M.E.Rose et H.E. Bethe avaient montré que la limite en énergie des cyclotrons classiques était de 12 MeV en proton et 34 MeV en particule α .

La photographie ci-dessous présente le plus grand cyclotron construit par Lawrence (184"). La construction commença en 1939, après que le prix Nobel ait été décerné à Lawrence et les premiers faisceaux de proton furent obtenus en 1946.



Synchrocyclotron

Fréquence

Une première solution pour accélérer des particules au delà de 10 MeV avec un cyclotron est de faire varier la fréquence d'accélération. C'est le principe des synchrocyclotrons. La fréquence du champ accélérateur devra être maximum au début et décroître pour atteindre f_{min} en fin de cycle. Comme ces machines sont surtout utilisées pour des ions, on remplacera la charge q de la particule accélérée par Qe et la masse m_0 , par le produit Am_u . La fréquence de début de cycle sera f_{max} :

$$f_{max} = \frac{QeB_m c^2}{2\pi Am_u}$$

soit si on exprime f en MHz et B en tesla

$$f_{max} = 15,4 \frac{Q}{A} B$$

Des fréquences de quelques dizaines de MHz sont donc suffisantes pour les synchrocyclotrons.

La fréquence de fin de cycle ou f_{min} est donnée par :

$$f_{min} = \frac{E_0}{E} f_{max}$$

Dans le cas du proton, la variation de fréquence ne sera que d'un facteur deux si on veut lui communiquer une énergie cinétique égale à son énergie de masse.

Fonctionnement

La méthode couramment utilisée pour les synchrocyclotrons est la suivante: une source produit des protons ou des ions légers au centre de la machine avec une énergie proche de l'énergie de masse au repos. Souvent la source est une source PIG à axe vertical dont le champ magnétique est créé par le synchrocyclotron. L'extraction est en effet latérale, les particules sont donc émises dans le plan médian. De plus, les particules sont extraites de la source au moment où la fréquence du champ électrique a pour valeur f_{max} . Les particules commencent alors à tourner dans la machine, la fréquence RF variant de façon à conserver le synchronisme, jusqu'à ce que le rayon maximum soit atteint et donc la fréquence f_{min} . Le faisceau est alors dirigé vers la zone d'expérience.

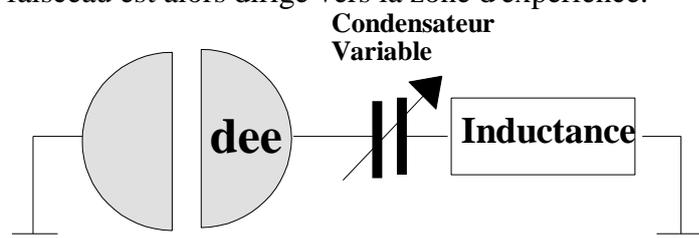


Figure 40: Principe d'un synchrocyclotron. La variation de la fréquence d'accélération est obtenue à l'aide d'un condensateur variable.

Pour faire varier la fréquence d'accélération on utilise un condensateur tournant. Technologiquement ce condensateur variable est le point faible des synchrocyclotrons, car il est constitué d'une électrode tournante et d'une électrode fixe. Les dimensions de ce condensateur atteignent plusieurs mètres ce qui pose des problèmes de vide, de haute tension et de mécanique. C'est une des raisons de l'abandon progressif des synchrocyclotrons.

En ce qui concerne les oscillations des particules autour de la trajectoire de référence, on constate, que le champ étant constant et donc indépendant de s il faut que l'indice de champ soit compris entre 0 et 1 partout. Ceci assure la stabilité horizontale et verticale. Or B étant uniforme, $n=0$. Donc la stabilité horizontale ou radiale est assurée. En ce qui concerne la stabilité verticale, la particule va décrire une hélice. Un indice de champ légèrement positif est donc donné vers l'orbite finale pour refocaliser le faisceau et assurer la stabilité verticale (figure 41). Attention cependant à la valeur donnée à n car une valeur positive impose un champ qui décroît en fonction du rayon ce qui est incompatible avec la condition d'isochronisme.

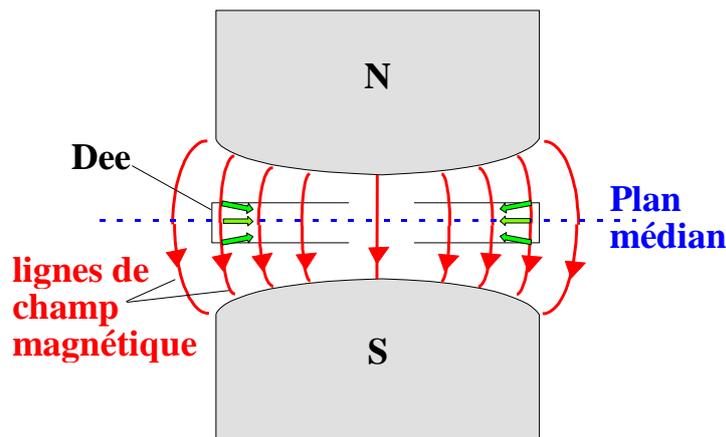
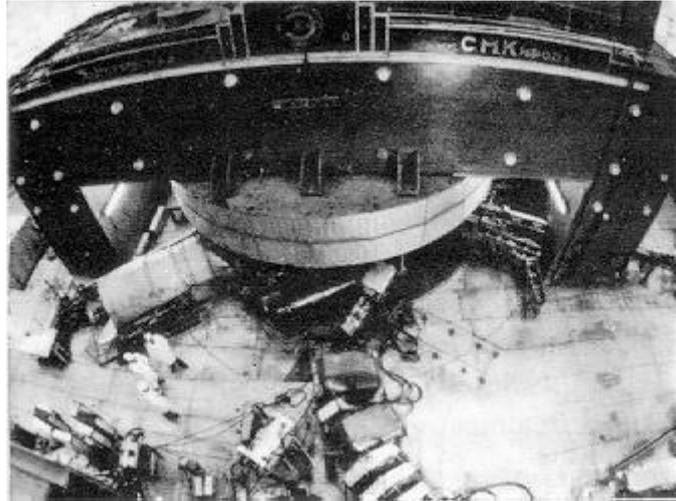


Figure 41: Forme des pièces polaires pour assurer la stabilité verticale dans les cyclotrons classiques ou les synchrocyclotrons.

La stabilité longitudinale est assurée si la phase est comprise entre $\pi/2$ et π donc cela signifie que toutes les particules ne seront pas accélérées et que le faisceau est pulsé.

Exemple de synchrocyclotrons

Les synchrocyclotrons furent construits après la seconde guerre mondiale à la suite des propositions faites par V. Veksler et E.M. McMillan. Dans la pratique ces cyclotrons à fréquence modulée avaient également un champ magnétique décroissant radialement ce qui permettait d'obtenir une augmentation de la focalisation axiale. De plus la variation de fréquence était comprise entre 50 Hz et 4 KHz, ce qui correspond à une accélération par tour faible et ne nécessite donc pas de champ élevé (typiquement entre 10 kV et 40 kV). Actuellement le plus important synchrocyclotron est installé à Gatchina (St Petersburg). Il permet d'obtenir des protons de 1 GeV. La photo ci-dessous montre les pièces polaires ainsi que la bobine supérieure du synchrocyclotron de Gatchina



Le SC du CERN est une machine plus petite mais qui a permis de produire des ions et des protons jusqu'à 600 MeV. La fréquence des paquets y est de 233 Hz, elle est liée au fait que le condensateur tournant balaye sa plage de valeurs à cette fréquence. Les tensions d'accélération sont voisines de 20 kV.

Le tableau ci-dessous rappelle quelques grandeurs importantes du SC.

		P	$^3\text{He}^{++}$	$^{12}\text{C}^{4+}$	$^{18}\text{O}^{6+}$	$^{20}\text{Ne}^{5+}$
f_{max}	MHz	30.1	20.3	10.1	10.1	7.6
f_{min}	MHz	16.8	13.9	8.5	8.5	6.6
E/A	MeV	600	303	86	85	49
ions/seconde		3.10^{13}	$>3.10^{12}$	$>10^{12}$	3.10^{11}	3.10^{11}

Tableau 5

Cyclotron Isochrone

La plupart des cyclotrons actuels fonctionnent avec une fréquence constante. Pour assurer la relation de synchronisme il faut donc faire varier le champ magnétique en fonction du rayon de la trajectoire: c'est le principe des cyclotrons isochrones. A partir de la formule:

$$f_p = \frac{qB_m}{2\pi m}$$

$$= \frac{qc^2 B_m}{2\pi E}$$

on constate qu'il faut augmenter la valeur du champ quand l'énergie augmente donc quand le rayon de la trajectoire augmente. Pour établir la relation qui lie le champ au rayon r , il suffit de remplacer E par sa valeur :

$$E^2 - E_0^2 = (qB_m R c)^2$$

De plus, $E = qcB_m \frac{c}{2\pi f_p}$ donc:

$$E^2 = (qcB_m)^2 \left(\frac{c}{2\pi f_p} \right)^2 = (qcB_m)^2 r^2 + E_0^2$$

$$(qcB_m)^2 \left[\left(\frac{c}{2\pi f_p} \right)^2 - r^2 \right] = E_0^2$$

on obtient la relation liant le champ moyen sur la trajectoire et r :

$$B_m(r) = \frac{E_0^2}{qc} \sqrt{\left(\frac{c}{2\pi f_p}\right)^2 - r^2}$$

Il reste maintenant à vérifier les conditions de stabilité axiale et radiale tout en assurant l'isochronisme car comme nous l'avons vu le champ dépendant de r défocalise verticalement. La solution consiste à appliquer un gradient de champ alterné. Les pôles ne sont plus plats mais leurs surfaces varient sinusoidalement en fonction de l'azimut. Une autre solution est de séparer les pôles en secteurs (figure 42). Dans les deux cas, le champ moyen reste croissant en fonction du rayon et la condition d'isochronisme est vérifiée.

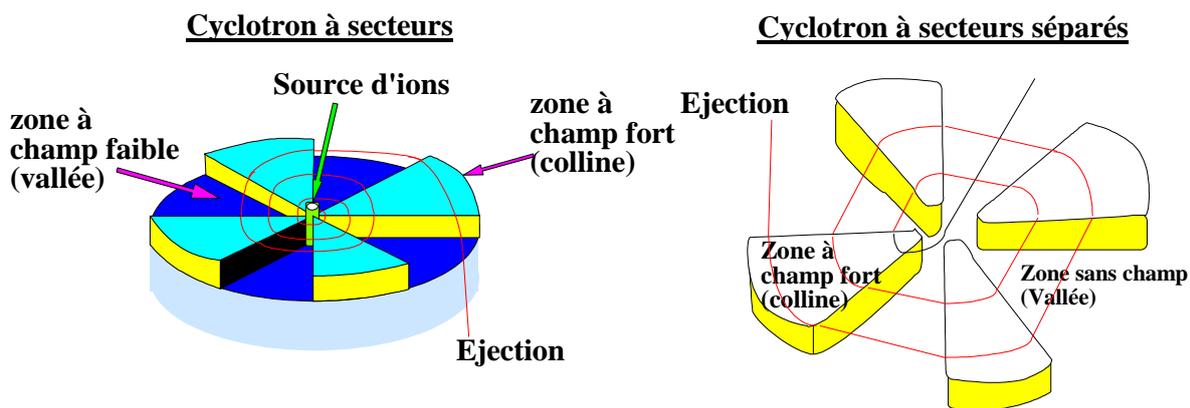


Figure 42: Schéma de principe des cyclotrons à secteurs.

Comme le montre la partie gauche de la figure 42, les zones où le gap entre pôles est petit, correspondent à une colline, et le champ y est fort. Les zones où le gap est grand sont appelées vallée et le champ y est plus faible. L'orbite d'équilibre n'est plus un cercle. Le rayon de courbure locale est d'autant plus petit que le champ est fort. Dans les cyclotrons à secteurs séparés la trajectoire est une succession de droites et de courbes.

La focalisation axiale est assurée de la manière suivante: lors des changements de courbure de la trajectoire, c'est à dire lorsque la particule passe d'une vallée à une colline, le vecteur vitesse a une composante radiale dirigée alternativement vers le centre puis vers l'extérieur du cyclotron. Cette vitesse radiale v_r agit avec la composante azimutale du champ B_θ et produit une force axiale toujours dirigée vers le centre ($F_z = q v_r B_\theta$). Ce principe a été découvert par Thomas en 1938 mais pour des raisons technologiques la première réalisation ne vit le jour qu'en 1950 à Bekley (AVF: Azimuthally Varying Field). La figure 43 représente un cyclotron à trois secteurs de type Thomas. On constate, sur la vue déroulée (b), que la force résultante est toujours focalisante axialement.

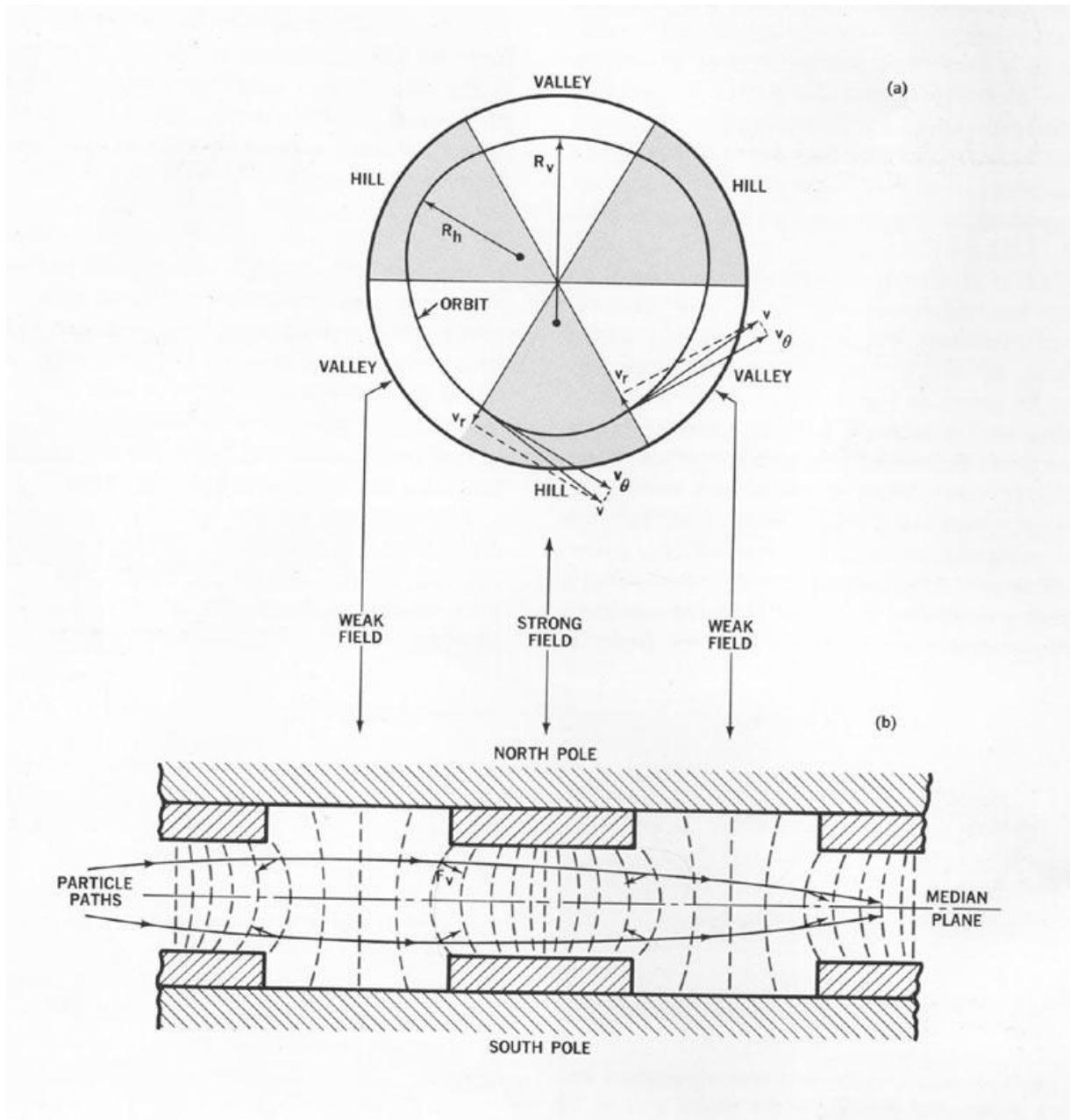


Figure 43 : Principe de la focalisation axiale par pôle à secteur.

De plus il s'avère qu'un champ magnétique spiralé crée par des pièces polaires comme celles présentées sur le schéma du cyclotron AGOR, permet aussi d'assurer à la fois la stabilité axiale et l'isochronisme.

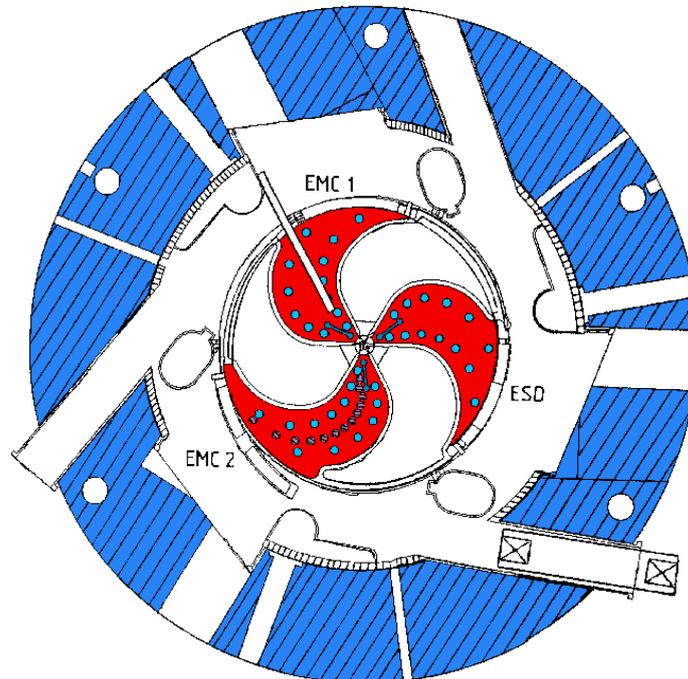


Figure 44: Schéma des pôles spiralés du cyclotron AGOR

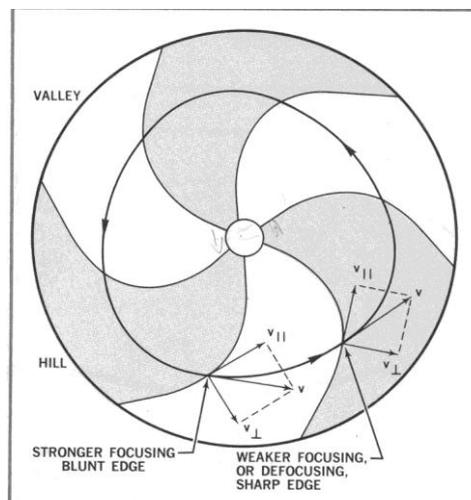


Figure 45 : Orientation du vecteur vitesse à l'entrée et à la sortie des secteurs en spirale. Cette disposition permet d'obtenir des composantes de la vitesse parallèle aux limites du secteur et procure ainsi une bonne focalisation axiale.

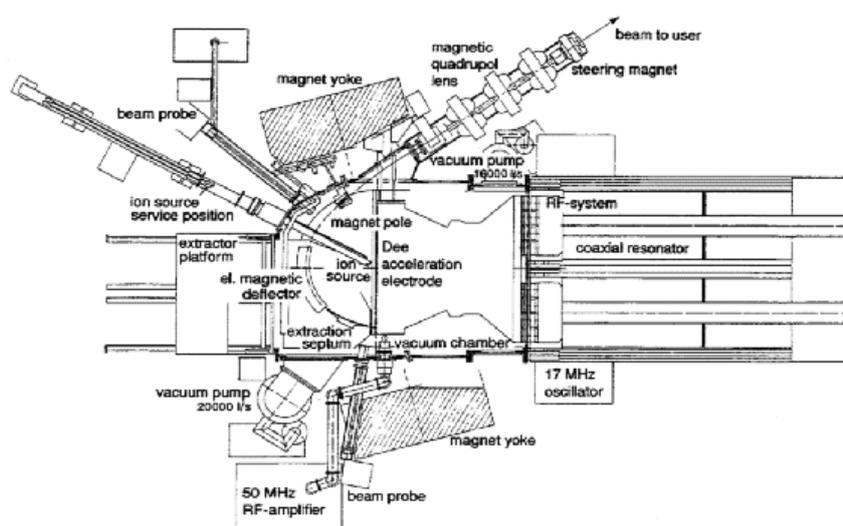
Quelques exemples de cyclotrons

Voici maintenant quelques exemples de cyclotrons actuellement opérationnels dans le monde.

PSI

Le Paul Scherrer Institut (PSI) dispose de plusieurs cyclotrons. L'un construit par Philips est un cyclotron à énergie variable de 2,5 m de diamètre avec des pôles circulaires. L'énergie des protons peut atteindre 72 MeV.

a :



b :

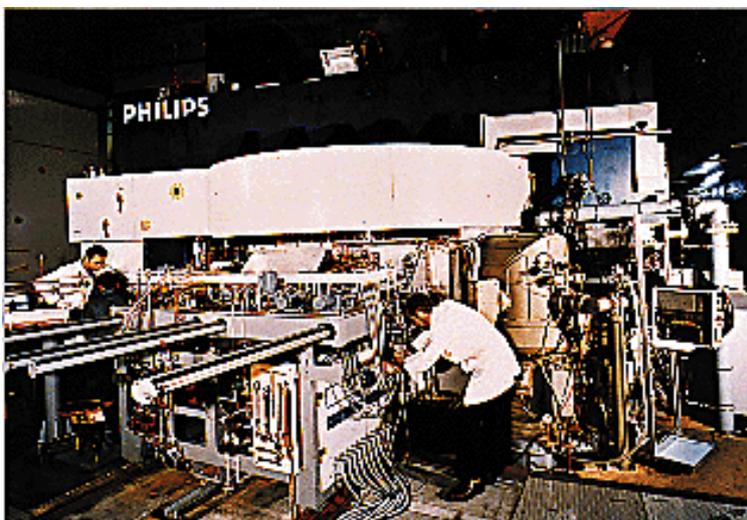


Figure 46 : Le cyclotron à proton du PSI (a : schéma vue de dessus. b : photo du côté extracteur)

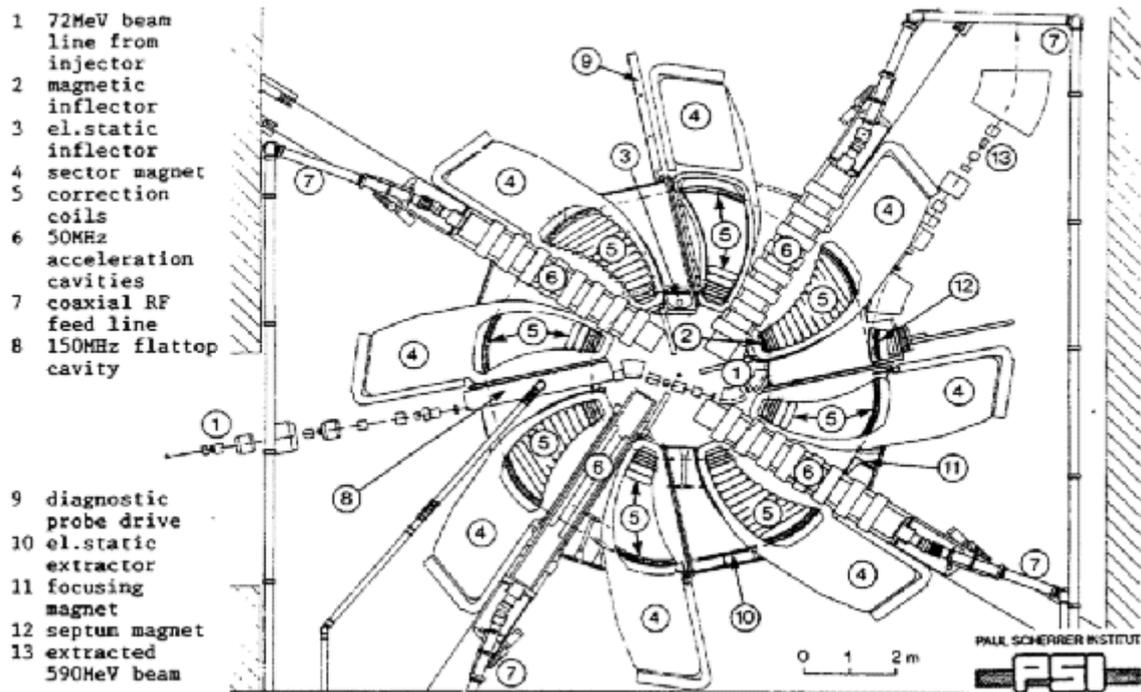


Figure 47 : Le cyclotron de 590MeV de l'institut Paul Sherrer.

CYCLONE

A Louvain la Neuve, en Belgique, une série de cyclotrons isochrones est installée. Le premier d'entre eux est le Cyclone (**Cyclotron de Louvain la Neuve**) construit dans les années 70 par Thomson CSF et ACEC. Il est capable d'accélérer des protons jusqu'à 90 MeV, des deutons à 55 MeV, et particules α jusqu'à 110 MeV ainsi que des ions lourds dans la gamme 0.6 à 27.5 MeV/A. Il est constitué de d'un aimant à 4 pôles avec un angle de spirale de 55° (figure 48).

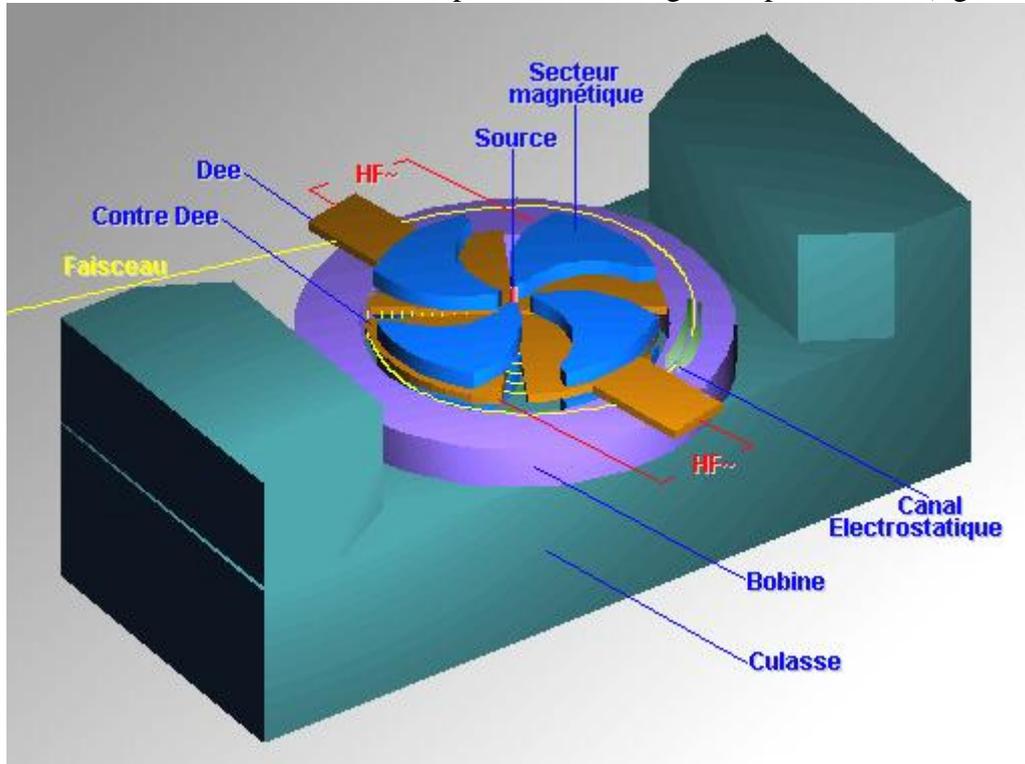


Figure 48: Schéma de principe du cyclotron cyclone .

Le Cyclone 30 est représenté sur la figure 49. Il permet d'accélérer des ions H^+ jusqu'à 30 MeV qui après passage dans une feuille de carbone permettent d'obtenir des protons dont l'énergie est comprise entre 15 et 30 MeV. Le courant maximum de proton obtenu est $500 \mu A$. La fréquence du système RF est 65.5 MHz et la tension maximum est de 50 kV. La partie magnétique pèse environ 50 t dont 4 de cuivre (bobines) et 45 de pièces polaires en fer.

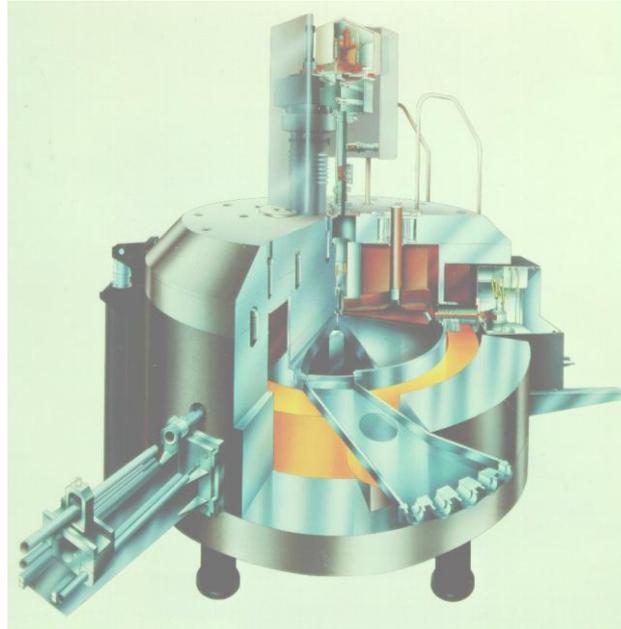


Figure 49: Schéma éclaté du cyclotron Cyclone 30 installé à Louvain le Neuve.

Le cyclotron Cyclone 44 installé dans le même institut, est utilisé pour accélérer des faisceaux d'ions légers radioactifs. $^{14}\text{N}^{2+}$ à 0.56 MeV/A, $^{16}\text{O}^{2+}$ à 0.43 et 0.55 MeV/A, $^{18}\text{O}^{2+}$ à .43 MeV/A.

GANIL

Le laboratoire GANIL près de Caen utilise divers cyclotrons à secteurs spiralés qui permettent essentiellement d'étudier les réactions nucléaires de moyenne énergie. Les ions peuvent être successivement accélérés en passant d'un cyclotron à l'autre.

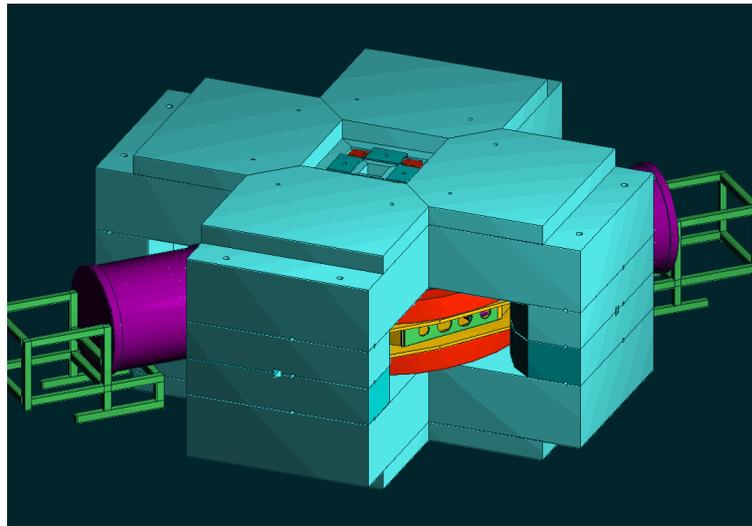


Figure 50: Le cyclotron CIME (Cyclotron d'Ion à Moyenne Energie) du GANIL sera utilisé dans le cadre du programme de recherche sur les faisceaux de noyaux exotiques SPIRAL. Avec cette machine on obtiendra des ions dont l'énergie sera comprise entre 2 et 25 MeV

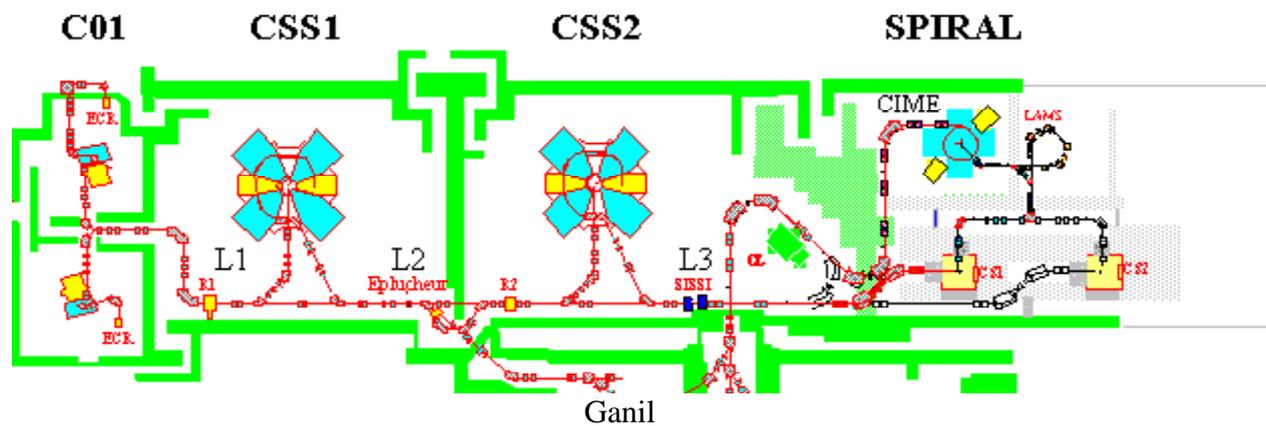


Figure 51: *Implantation des cyclotrons du GANIL*

AGOR

C'est un cyclotron à aimants supraconducteurs installé à Groningen en Hollande

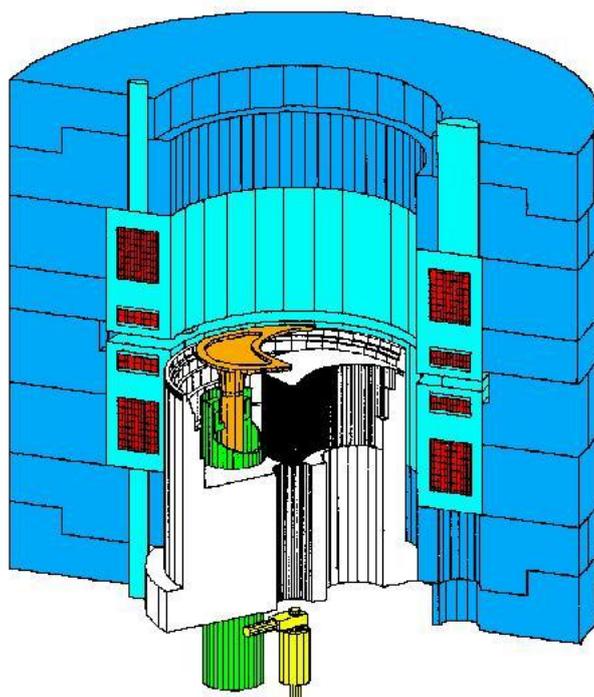


Figure 52: Vues du cyclotron AGOR.

Les principales caractéristiques du cyclotron AGOR sont résumées dans le tableau ci-dessous :

bending limit Kf	600 MeV
focusing limit Kb	200 MeV
pole diameter	1.88 m
number of sectors	3
spiral coefficient	R < 0.30 m: no spiral R = 0.70 m: 18 mrad/cm R = 0.88 m: 43 mrad/cm
minimum hill gap	7 cm
maximum valley gap	168 cm
maximum current density	Coil 1: 4271 A/cm ² Coil 2: 3270 A/cm ²
range of central magnetic field	1.70 - 4.01 T
number of trim coils	15
maximum current in trim coils	500 A
RF frequency range	24 - 62 MHz

Chapitre 7 Synchrotrons

Introduction

Le chapitre précédent a clairement mis en évidence les limitations des cyclotrons, notamment en ce qui concerne l'énergie. En effet l'élément le plus difficile à réaliser du point de vue économique est l'aimant . Une autre solution est de remplacer la trajectoire en spirale par un cercle, mais en faisant en sorte de faire varier à la fois le champ magnétique et la fréquence d'accélération au cours du cycle.

Un synchrotron est généralement composé de plusieurs sections dont les actions sur le faisceau sont différentes. Dans certaines d'entre elles on procède à l'accélération, ce sont alors des sections droites. Dans d'autres, la trajectoire est courbée à l'aide de dipôles, enfin on ajoute des quadripôles pour assurer la focalisation. Il faut donc désormais faire attention et ne pas confondre le rayon locale de l'orbite de référence ρ avec le rayon moyen R_m de la machine (voir la figure 38). Il en est de même pour le champ magnétique. On a donc:

$$p = qB\rho = qR_m B_m$$

Les différences entre ρ et R_m peuvent largement atteindre 30 %.

En ce qui concerne l'énergie nous avons déjà établi:

$$E^2 = E_0^2 + (qBR)^2 c^2$$

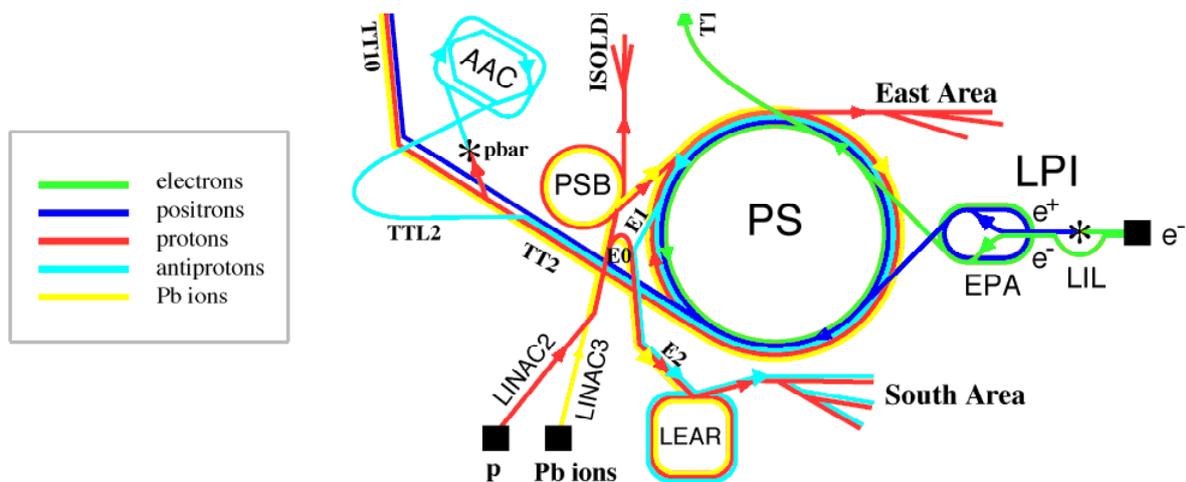
et

$$\frac{E_c}{A} \left(\frac{E_c}{A} + 2m_u \right) = \frac{Q^2}{A^2} (300B_m R)^2$$

ce qui s'écrit très simplement lorsque les énergies sont en MeV , le champ en Tesla, le rayon en mètre:

$$E = 300B_m R_m$$

De plus, compte tenu des champs rémanents et des rayons assez grands les synchrotrons (donc des champs magnétiques pas trop puissants), il ne faut pas injecter les particules avec une énergie trop basse. Cela nécessite de faire précéder le synchrotron de plusieurs pré-accelérateurs.



Dans le cas du PS du CERN, c'est un accélérateur linéaire qui sert d'injecteur. D'autre machine comme le synchrotron de Fermi Lab utilise un accélérateur électrostatique Cockroft-Walton, suivi d'un LINAC.

Un autre paramètre à garder à l'esprit, est que les énergies atteintes étant grandes, les pertes par rayonnement électromagnétique ne sont plus négligeables. Ce rayonnement est appelé rayonnement synchrotron, il se produit chaque fois qu'une particule chargée est accélérée et est maximum lorsque l'accélération est perpendiculaire à la vitesse de la particule. Pour une unité de charge, la perte en énergie δE_{sync} est donnée par:

$$\delta E_{sync} = 6.10^{-15} \frac{1}{\rho} \left(\frac{E}{E_0} \right)^4$$

où les énergie sont en MeV. Cette perte est négligeable pour les ions, mais pour des électrons de 30 GeV circulant dans un synchrotron de $\rho=120$ m, cette perte par tour δE_{sync} vaut 600 MeV. Dans les synchrotrons à électron par exemple les cavités accélératrices servent essentiellement à compenser ces pertes. Pour limiter cet effet, on accroît la valeur ρ tout en diminuant la champ moyen. Du point de vue du coût, la part des aimants devient plus faible, mais le génie civil est plus important. Actuellement, le collisionneur à électrons positrons du CERN (LEP) atteint 27 km de circonférence et peut fournir des électrons de 100 GeV.

Un autre point clé des synchrotrons est le gain en énergie par tour. Il est donné par:

$$\delta E = qV_{RF} \sin \phi_s$$

et nous avons montré que dans le cas général d'une machine circulaire:

$$\delta E = 2\pi Rq(R\dot{B} + B\dot{R})$$

soit pour un synchrotron:

$$\delta E = 2\pi qR_m^2 \dot{B}$$

Donc pour avoir un gain en énergie par tour constant il faut que le champ varie linéairement en fonction du temps. En règle générale les variations du champ sont de l'ordre de 0.5 Tesla/seconde.

Enfin la fréquence du système RF d'accélération est un multiple de la fréquence de révolution.

$$f_{RF} = h \cdot f$$

Le choix de h est liée à la technologie des cavités et aimants utilisés dans la machine. La fréquence de révolution f est donnée par:

$$f = \frac{f_0 B}{\sqrt{B^2 + B_0^2}} \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{E_0}{qcR} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{c}{2\pi R}$$

De plus comme $B_0 = \frac{E_0}{E} B_{max}$ on peut en déduire la fréquence à l'injection, en supposant que le champ est alors B_{inj} :

$$f_{inj} = \frac{f_0 B_{inj}}{\sqrt{B_{inj}^2 + B_0^2}}$$

On remarquera que pour un électron la fréquence reste constante car $B_0 = \frac{E_0}{E} B_{max} \approx 0$.

Lorsque l'on applique ces relations au cas des protons, en supposant que le champ à l'injection est $B_{inj}=0.01$ T on obtient:

Energie des protons (GeV)	B_0 (T)	f_{inj}
30	$330 \cdot 10^{-4}$	$0.3 f_0$
300	$33 \cdot 10^{-4}$	$0.95 f_0$

Maille de machine

Nous avons déjà abordé, la notion de maille dans le chapitre sur la théorie des accélérateurs circulaires. Nous allons revenir, très brièvement sur ce point en donnant les conditions liées au synchrotron et l'influence qu'elles ont sur les mailles élémentaires. Un synchrotron est constitué de N mailles. Au voisinage de l'orbite de référence, le champ magnétique est fonction des trois variables d'espace r, z, s . On peut écrire:

$$B_x = kz \quad B_z = B_0 + kx \quad B_s = 0$$

avec toujours $k = -n \frac{B_0}{\rho}$ c'est le facteur circonférentiel.

Section droite O

Dans une section droite il n'y a aucun champ. Donc $B_0 = 0$. Ces sections servent au transport du faisceau entre deux éléments actifs.

Section dipolaire B

C'est dans les sections dipolaires que la trajectoire des particules est courbée. La trajectoire est un cercle de rayon ρ :

$$\rho = \frac{p}{qB_0} \quad \text{et on a} \quad \begin{array}{l} B_0 \neq 0 \\ k = 0 \end{array}$$

dans ce cas l'indice de champ est nul.

Section quadripolaire pure Q

C'est une section focalisante suivant un axe et défocalisante suivant l'autre axe.

$k > 0$ la section est focalisante Horizontalement

$k < 0$ la section est défocalisante Horizontalement

Dans cette section on a:

$$\begin{array}{l} B_0 = 0 \\ k \neq 0 \end{array}$$

Section focalisante F

Dans ce cas on a:

$$\begin{array}{l} B_0 \neq 0 \\ n = -\frac{\rho k}{B_0} < 1 \end{array}$$

c'est à dire qu'il y a une composante dipolaire et une composante quadripolaire focalisante. Les deux fonctions sont réalisées par le même élément (ou le même aimant au sens large). La trajectoire de référence est toujours un cercle.

Section defocalisante D

Dans ce cas on a:

$$\begin{array}{l} B_0 \neq 0 \\ n > 0 \quad \text{donc} \quad k < 0 \end{array}$$

c'est à dire qu'il y a une composante dipolaire et une composante quadripolaire défocalisante. La trajectoire de référence est toujours un cercle.

Dans les synchrotrons, on utilise des associations de maille, comme par exemple la maille FODO, ou encore celle utilisée au PS du CERN la maille FOFDOD.

On se rappellera que les matrices de transfert se mettent sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\phi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\phi \\ -\sqrt{K} \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ avec } \phi = \sqrt{K}(s - s_0)$$

et qu'il y a une matrice dans le plan horizontal et une matrice dans le plan vertical.

L'étude des mailles est importante car elle permet de connaître les dimensions de la chambre à vide. On a montré que les dimensions de la chambre étaient données par :

$$a \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \sqrt{\beta_{\max}} \text{ sachant que } m_{12} = \beta \sin \mu$$

A cela s'ajoute la déformation radiale de la trajectoire due aux oscillations de phase (ou oscillations longitudinales) :

$$\Delta r \approx \frac{r}{v_r^2} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

$$\Delta r \propto r \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

Donc finalement les dimensions de la chambre doivent vérifiées :

$$a_x \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\pi}} \sqrt{\beta_{x \max}} + A r \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

$$a_z \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\pi}} \sqrt{\beta_{z \max}}$$

où A est une constante.

Pour conclure on voit que les dimensions sont données par les caractéristiques du faisceau à l'injection ($\varepsilon_x, \varepsilon_z$) ainsi que par les caractéristiques des mailles β_{\max} . La forme de la chambre à vide est souvent une ellipse dont la grande dimension est horizontale. Par exemple, la chambre à vide du PS au CERN mesure 14x17 cm.

Synchrotron à focalisation forte

Revenons aux débuts de l'ère des synchrotrons. Le champ magnétique était produit par quatre électro-aimants. Le champ était indépendant de s et on avait donc un gradient de champ

constant $\frac{\partial B}{\partial x} = cte$. (indice de champ identique partout et $0 < n < 1$). Cela conduit à :

$$\beta_x = \frac{R}{\sqrt{1-n}} \text{ et } \beta_z = \sqrt{n}$$

$$v_x = \sqrt{1-n} \text{ et } v_z = \sqrt{n}$$

Si on remplace ces valeurs dans les inégalités définissant la taille de la chambre à vide, on s'aperçoit que, les émittances étant fixées, les demi ouvertures ont une valeur minimale incompressible. Les synchrotrons à gradient constant ont donc une focalisation faible. Cela conduit à des diamètres de chambre à vide irréalisable quand l'énergie augmente beaucoup. Typiquement la maille représentant ces synchrotrons est la maille FO.

Maintenant, si on considère une maille FD avec des indices de champ élevés. L'indice n_f de la partie F sera négatif, n_d celui de la partie D sera positif, d'où le nom de gradient alterné. Cela fixe aussi la forme de l'entrefer. Un indice positif correspond à un entrefer qui s'ouvre lorsque l'on passe de l'intérieur vers l'extérieur de l'orbite de référence.

secteur	n	l'entrefer s'ouvre	Convergence x	Convergence z
défocalisant	$n > 0$	vers l'extérieur	D	F
focalisant	$n < 0$	vers le centre	F	D

Dans le chapitre sur la théorie des accélérateurs circulaires, la matrice de transfert d'une maille FD a été calculée et on a montré que la demi-trace était:

Plan horizontal:

$$\cos \mu_r = \cos \phi_r \operatorname{ch} \varphi_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_r}{\phi_r} - \frac{\phi_r}{\varphi_r} \right) \sin \phi_r \operatorname{sh} \varphi_r$$

$$\phi_r = \frac{2\pi \sqrt{n_f}}{N \rho}$$

avec

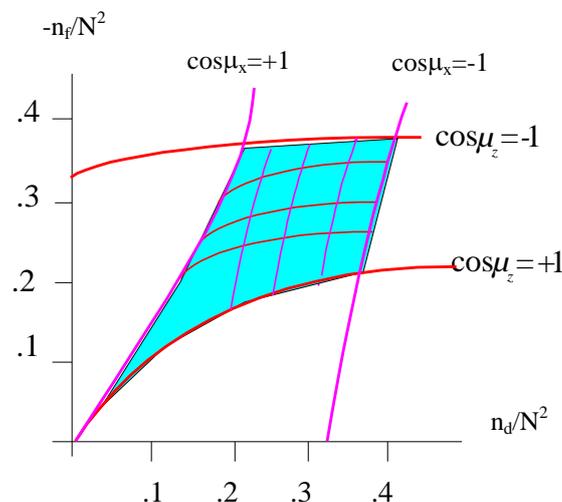
$$\varphi_r = \frac{2\pi \sqrt{n_d}}{N \rho}$$

où n_1 et n_2 sont les indices de champ des deux quadripôles.

Plan vertical:

$$\cos \mu_z = \cos \phi_z \operatorname{ch} \varphi_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_z}{\phi_z} - \frac{\phi_z}{\varphi_z} \right) \sin \phi_z \operatorname{sh} \varphi_z$$

La stabilité horizontale est vérifiée lorsque l'inégalité $-1 < \cos \mu_x < 1$ est vérifiée. De la même manière, la stabilité verticale est vérifiée lorsque l'inégalité $-1 < \cos \mu_z < 1$ est vérifiée.



Ces deux inégalités permettent de définir une zone de stabilité dans le plan $(n_d/N^2, -n_f/N^2)$ et donc de choisir les valeurs des indices de champ. On montre que si les indices de champ sont égaux ($n_d = -n_f$) on obtient la relation :

$$n < 0.35N^2$$

Comme N est le nombre de mailles ou de périodes par tour, il faut donc un grand nombre de mailles pour avoir un indice élevé.

Quelques exemples de synchrotrons

Nous allons maintenant citer quelques exemples de synchrotrons utilisés dans le domaine de la recherche.

Le Fermi National Accelerator Laboratory près de Chicago, possède un synchrotron à protons de 800 MeV. Au Japon le synchrotron KEK atteint 12 GeV. En ce qui concerne les électrons on notera DESY situé près d'Hambourg qui atteint 7 GeV ou l'accélérateur de Cornell aux USA qui atteint 10 GeV. La plupart du temps, les synchrotrons sont aussi utilisés comme injecteurs des collisionneurs.

Le PS du CERN

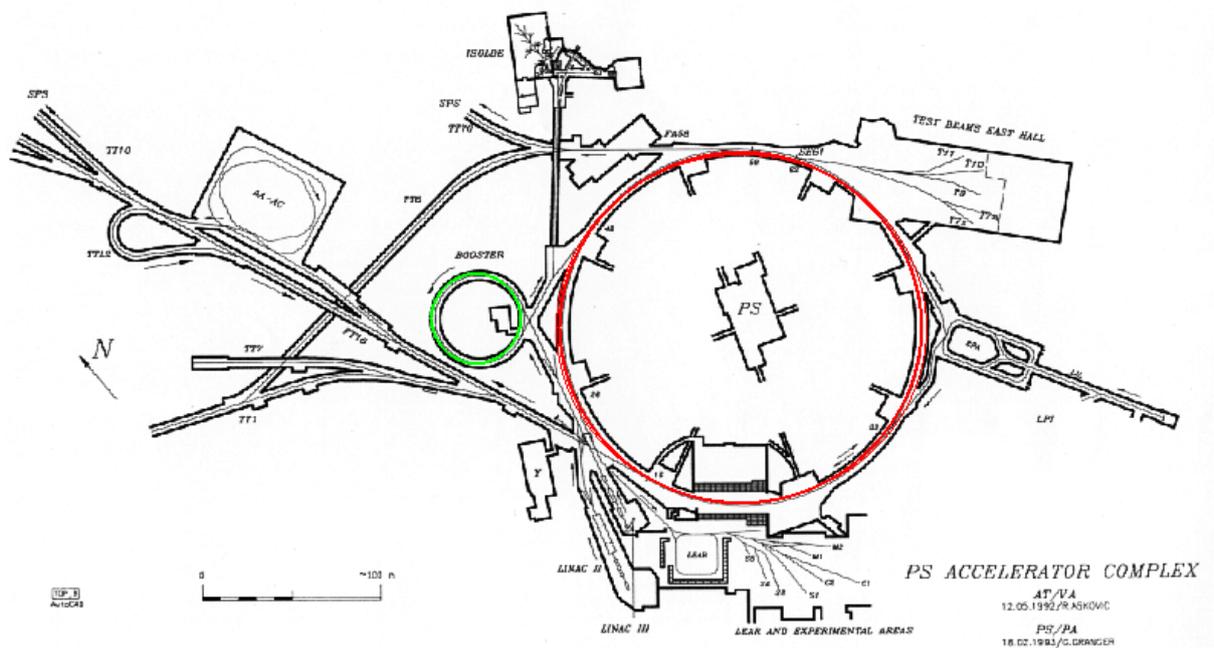


Figure 53 : Le PS du CERN est représentée en rouge. En vert l'injecteur Booster.

Le PS a été constamment amélioré depuis sa construction. On y accélère aussi bien des protons que des ions Pb. Les particules passent d'abord dans un mini synchrotron qui sert d'intermédiaire entre les LINACs et le PS (50 à 800 MeV).

Le tableau ci-dessous résume les principales caractéristique du PS dans sa configuration accélérateur d'ion Pb.

Parameter	Pb ⁵³⁺ ions	Protons	Unit
Charge State	53	1	
Atomic Mass	207.948	1.007	u
<u>Injection:</u>			
Kinetic Energy, T	95.4	993	MeV/u
$\beta = v/c$	0.421	1000	MeV
$\gamma = E/E_0$	1.102	0.875	
Bending Field, B	0.08073	0.08073	T
Magnetic Rigidity, B ρ	5.657	5.657	Tm
dB/dt	0	0	T/s
Total Energy, E	1.027	1.924	GeV/u
Momentum, p	0.432	1.684	GeV/c/u
$\eta = \gamma t^{-2} - \gamma^{-2}$	-0.796	-0.207	
Revolution Frequency, f₀	200.8	417.5	kHz
Revolution Period, T ₀	4.98	2.39	μ s
Horizontal Tune, Q _x	6.25	6.25	
Vertical Tune, Q _y	6.25	6.25	
<u>Two bunches into one bucket RF capture</u>			
Bunches from PSB:			
Bunch Length, t _b	45	50	ns
Longit. Emittance, ϵ_l	8.0 10 ⁻³	0.157	eVs/u
Half Mom. Spread, dp/p	0.6210 ⁻³	1.3510 ⁻³	
PS Capture			
RF Voltage, V _{RF}	50	50	kV
Harmonic Number, h	20	20	
RF Frequency, f _{RF}	4.02	8.35	MHz
Synchrotron Frequency, f _{s0}	2.68	1.97	kHz
Longit. Acceptance, A _l	96 10 ⁻³	0.51	eVs/u
Half Bucket Height, $\Delta p/p$	1.67 10 ⁻³	2.27 10 ⁻³	
Bunches after filamentation			
Bunch Length, t _b	170		ns
Longit. Emittance, ϵ_l	66 10 ⁻³		eVs/u
Half Mom. Spread, dp/p	1.37 10 ⁻³		
Hor. Transv. Emitt., ϵ_x (2σ)	26		π mm mrad
Vert. Transv. Emitt. ϵ_y (2σ)	13		π mm mrad
Acceleration Parameter			
Max. dB/dt	2.2	2.2	T/s
RF Voltage, V _{RF}	200	200	kv
RF Harmonic Number	20	20	
Duration	0.7	0.7	s
Extraction			
Kinetic Energy, T	4.25	19.07	GeV/u
$\beta = v/c$	0.984	0.999	
$\gamma = E/E_0$	5.558	21.33	
Bending Field, B	0.9512	0.9512	T
Magnetic Rigidity, B ρ	66.66	66.66	Tm
dB/dt	0	0	T/s
Total Energy, E	4.25	20.0	GeV/u
Momentum, p	5.09	20.0	GeV/c/u
$\eta = \gamma t^{-2} - \gamma^{-2}$	-0.0054	0.025	
Revolution Frequency, f₀	469.3	476.6	kHz
Revolution Period, T ₀	2.13	2,1	μ s

Horizontal tune, Q_x	6.25	6.25	
Vertical tune, Q_y	6.25	6.25	
RF Voltage, V_{RF}	200	200	kV
Harmonic Number	20	20	
RF Frequency, f_{RF}	9.39	9.53	MHz
Synchrotron Frequency, f_{s0}	195	423.9	Hz
Longit. Acceptance, A_l	5.3	9.6	eVs/u
Half Bucket Height, $\Delta p/p$	7.810^{-3}	$3.58 \cdot 10^{-3}$	
Bunch Length, τ_b	9	18	
Longit. Emittance, ϵ_l	0.072	0.53	eVs/u
Half Mom. Spread, dp/p	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$0.94 \cdot 10^{-3}$	
Hor. Transv. Emitt., $\epsilon_x (2\sigma)$	3	3	π mm mrad
Vert. Transv. Emitt., $\epsilon_y (2\sigma)$	2	2	π mm mrad

On constate que le champ varie d'un facteur 10 entre l'injection et l'extraction et que la fréquence RF est doublée.

Chapitre 8 Collisionneurs

Introduction

On comprend aisément l'intérêt d'utiliser un collisionneur, par rapport à un accélérateur envoyant des particules sur une cible fixe. Dans le premier cas le repère de laboratoire est aussi celui du centre de masse (particules identiques) et l'énergie mise en jeu dans la collision est deux fois l'énergie du faisceau. Dans l'autre cas l'énergie disponible pour la collision est beaucoup plus faible car "il faut entraîner le centre de masse". Cependant il est beaucoup plus difficile de faire entrer en collision deux particules en mouvement, plutôt que d'envoyer le faisceau sur une cible fixe car la densité d'un faisceau est très faible comparée à celle de la matière solide d'une cible. Il faut donc des luminosités élevées dans les collisionneurs si on ne veut pas avoir à attendre trop longtemps que des collisions se produisent. Enfin, le repère du laboratoire étant confondu avec celui du centre de masse il faudra observer les collisions avec des détecteurs couvrant tout l'espace autour de la zone de collision (4π) alors que dans les collisions sur cible fixe les détecteurs sont "vers l'avant" et donc de plus petites dimensions.

Luminosité

La luminosité est le paramètre important des collisionneurs car on a la relation :

$$\frac{dN}{dt} = L\sigma$$

σ est la section efficace du phénomène, L la luminosité de l'accélérateur. Le nombre d'événement par seconde $\frac{dN}{dt}$ que l'on produira sera donc très fortement lié à la luminosité.

C'est donc sur ce facteur technologique L , qu'il faut se concentrer. La luminosité peut être calculer par la relation :

$$L = \frac{I_1 I_2}{q^2 c} \frac{l}{wh}$$

où I_1, I_2 sont les intensités des faisceaux rentrant en collision, souvent I_1, I_2 . q est la charge supposée identique pour les deux faisceaux, l, w et h étant la longueur, largeur et la hauteur de la zone de collision. Les luminosités sont comprises entre 10^{29} et 10^{32} $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Au LHC la luminosité atteindra 10^{34} $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ en proton avec une énergie de l'ordre de 7 TeV.

Pour obtenir de telles intensités il faut accumuler et stocker le faisceau avant de réaliser les expériences en un endroit donné de la machine.

Collisionneurs $p\bar{p}$

Le collisionneur SPS du CERN a été utilisé pour mettre en évidence le boson W prédit par la théorie électrofaible. Des protons de 315 GeV rentrait alors en collision avec des anti-protons de même énergie. La luminosité était de $2 \cdot 10^{30}$ $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Collisionneurs e^+e^-

L'accélérateur LEP est en service depuis 1989. Le champ moyen est de 0.04 T et le rayon de 4,24 km. ($\rho=3,1$ km). L'énergie était de 2x50 GeV et elle est passée à 2x90 GeV en 1996. La fréquence des cavités est de 352 MHz (le nombre d'harmonique est de 31320).

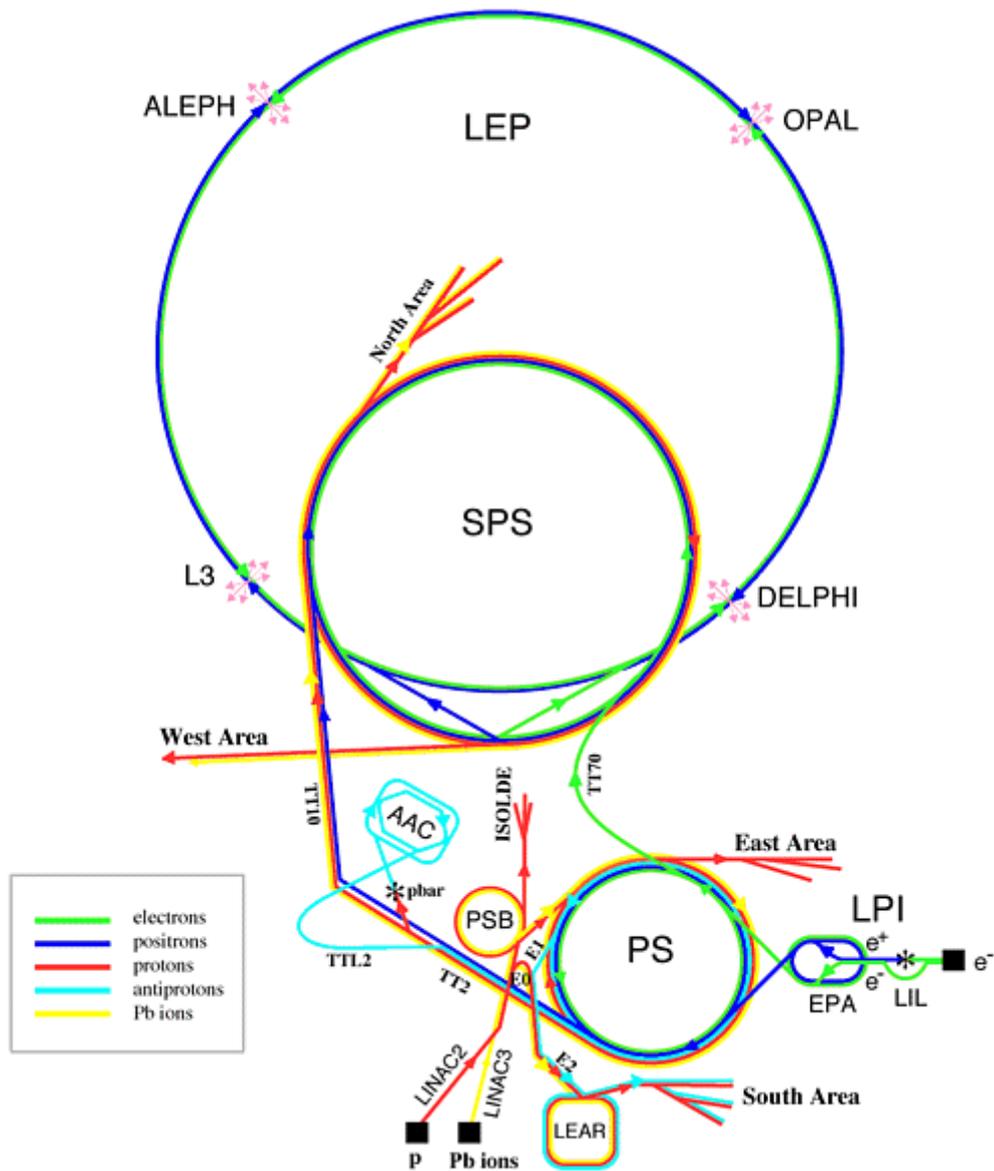
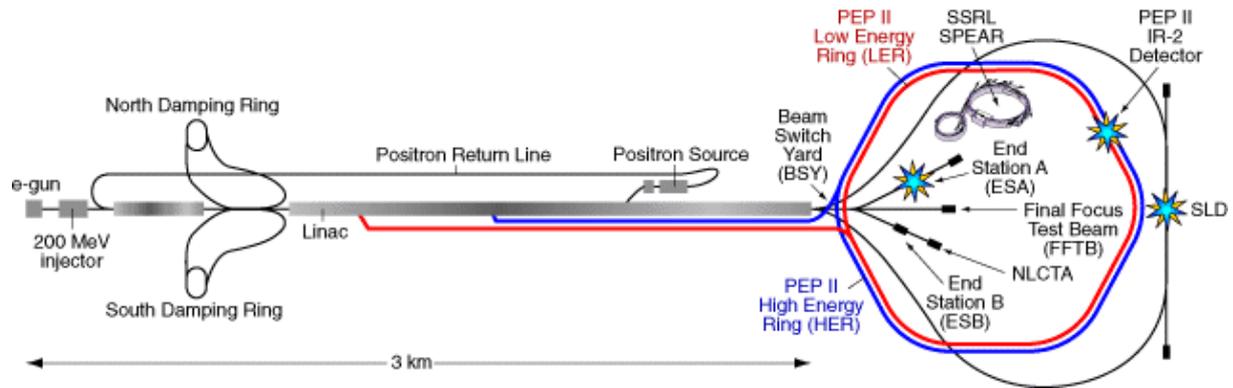


Figure 54

La figure ci-dessus représente l'ensemble du complexe d'accélérateurs du CERN

Collisionneurs linéaires e+e-

La figure ci-dessous représente le collisionneur linéaire SLC. L'énergie est de 50 GeV.



Annexe A

Constantes

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2.997924 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Constante de planck	$h = 6.626075 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ $\hbar = h/2\pi$ $\hbar c = 197.327 \text{ MeV fm}$
Masse de l'électron	$m_e = 0.510999 \text{ MeV}/c^2 = 9.109389 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2 = 1.672623 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Unités

Angström	$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$
Atmosphère	$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101 \,325 \text{ Pa}$
Barn	$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = (10^{-4} \text{ \AA})^2 = (10 \text{ F})^2$
Electron-Volt	$1 \text{ eV} = 1.602 \,177 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$
Fermi	$1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$
Tesla	$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$

Formulaire

Gradient:

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{Cartésiennes}$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{Cylindriques}$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad \text{Sphériques}$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{Cartésiennes}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{Cylindriques}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad \text{Sphériques}$$

Divergence:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{Cartésiennes}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{Cylindriques}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{Sphériques}$$

Rotationnel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad \text{Cartésiennes}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \quad \text{Cylindriques}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \quad \text{Sphérique}$$

Relations générales

$$\vec{\nabla} \cdot (UV) = U \vec{\nabla} \cdot V + V \vec{\nabla} \cdot U \quad \vec{g} \text{grad}(UV) = U \vec{g} \text{grad} V + V \vec{g} \text{grad} U$$

$$\vec{\nabla} \cdot U \vec{A} = U \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U \quad \text{ou} \quad \text{div}(U \vec{A}) = U \text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{g} \text{grad} U$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\text{rot} \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\text{rot} \vec{B})$$

et

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Annexe B

Rappels élémentaires sur les ondes

- Une onde plane progressive suivant l'axe Ox est sinusoïdale si le mouvement d'un point du milieu soumis à cette onde vérifie la relation:

$$y(x,t) = A \cos \omega \left(t \pm \frac{x}{c} \right)$$

- Le plan d'onde est le plan perpendiculaire à la direction de propagation.
- Le vecteur d'ondes est:
 - perpendiculaire à la direction de propagation
 - de même sens que la propagation
 - de norme $k = \frac{\omega}{c}$

- Relations entre fréquence γ , pulsation ω , période T , longueur d'onde λ et nombre d'onde k :

$$\gamma = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\gamma, \quad \lambda = cT, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Une onde stationnaire résulte de la superposition de deux ondes sinusoïdales de même pulsation ω et de même amplitude a se propageant en sens contraire ($y_1(x,t) = a \cos \omega(t - kx + \varphi_1)$ et $y_2(x,t) = a \cos \omega(t - kx + \varphi_2)$). Elle est caractérisée par sa phase qui ne dépend que du temps ($\varphi = \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$) et par son amplitude A qui dépend de la position du point considéré ($A = 2a \left| \cos \left(kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right|$). Les ventres sont les points qui vibrent avec une amplitude maximum. Deux ventres consécutifs sont séparés d'une demi longueur d'onde ($\lambda/2$). Les nœuds sont les points qui vibrent avec une amplitude minimum. Deux nœuds consécutifs sont séparés d'une demi longueur d'onde ($\lambda/2$). Un ventre et un nœuds sont séparés d'un quart de longueur d'onde ($\lambda/4$). Entre deux nœuds les points sont en phase, mais de part et d'autre d'un nœud les points sont en opposition de phase.
- Une résonance est obtenue lorsque l'amplitude du mouvement d'un oscillateur est maximum.
- Dans un milieu limité, la superposition d'ondes incidentes et réfléchies donne naissance à un phénomène d'ondes stationnaires si la condition de résonance est satisfaite. Les fréquences de résonance sont imposées par les conditions aux limites du milieu:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Rappels sur les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel 1^{ère} et 2^{ème} espèce d'ordre n sont les solutions particulières de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

La solution générale est de la forme:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

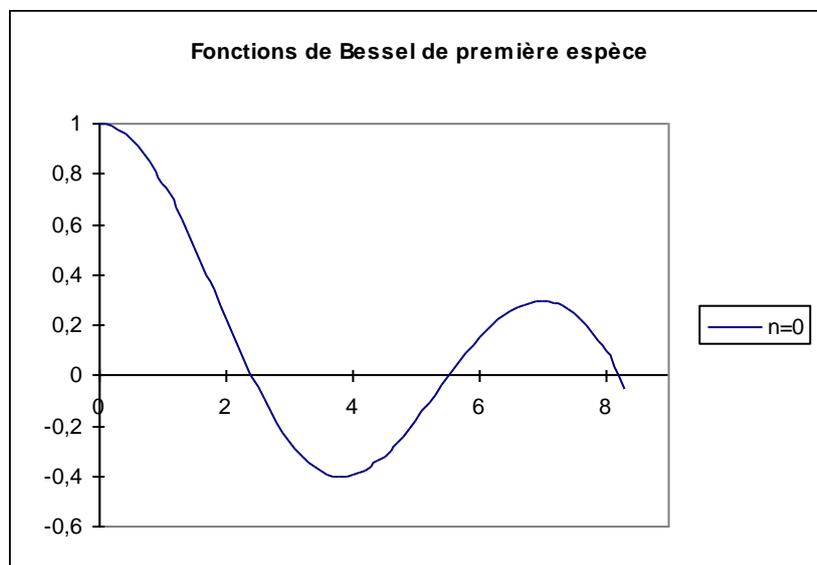
où C_1 et C_2 sont des constantes.

Les fonctions de Bessels de 1^{ère} espèce sont:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$$

Les fonctions de Bessels de 2^{ème} espèce sont:

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0, 1, 2, 3 \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$



Une propriété importante des fonctions de Bessel est :

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

Bibliographie

D. Blanc, Noyaux, particules, réacteurs nucléaires, *ed. Masson*.

CERN ACCELERATOR SCHOOL, Fourth General Accelerator Physics Course Proceedings, *Rapport CERN 91-04*.

CERN ACCELERATOR SCHOOL, Fourth General Accelerator Physics Course Proceedings, *Rapport CERN 94-01*.

CERN ACCELERATOR SCHOOL, Fourth General Accelerator Physics Course Proceedings, *Rapport CERN 94-02*.

A. Chabert, Théorie des accélérateurs de particules, *Cours DEA de l'Université de Lyon..*

F. S. Crawford, Ondes, Cours de physique de Berkley, *ed. Armand Collin*

P. Germain, Introduction aux accélérateurs de particules, *Rapport CERN 89-07*.

C.E. Hill, Ion and electron sources, *CERN*

M. Laguna, Photémission et photoémission de champ a partir de photocathodes à reseaux de pointes de silicium sous l'action de laser continu ou pulsés, *Thèse de l'Université de Clermont-Ferrant 1995*.

P. Lapostolle, Introduction à la théorie des accélérateurs linéaires, *Rapport CERN 87-09*.

R. Nataf, Introduction à la Physique des particules, *ed. Masson*.

R. Petit, Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique, *ed. Masson*

Sites Internet

Sources

<http://www.casetechnology.com/source.html>

<http://nicewww.cern.ch/~linac2/seminar/seminar.htm>

<http://nicewww.cern.ch/~linac2/sources/source.htm>

Linac

<http://www2.slac.stanford.edu/vvc/home.html>

Cyclotron

<http://kviexp.kvi.nl/~agorcalc/Statistics/AgorHome.htm>

<http://ganinfo.in2p3.fr/>

Synchrotron

<http://www.cern.ch/CERN/Accelerators.html>

Collisionneurs

<http://www.cern.ch/CERN/Divisions/SL/welcome.html>

Répertoire des accélérateurs

<http://www-laacg.atdiv.lanl.gov/acclist/acclist2.html>