

Intrication, EPR et Inégalités de Bell. Cours Physique et Applications Quantiques (PAQ), UE-D FISE IMT Atlantique

Gines Martinez¹

¹Directeur de Recherches au CNRS, Subatech (IMT Atlantique, Nantes Université, CNRS/IN2P3), Nantes, France

29 septembre 2025

Table des matières

1 Le Produit Tensoriel	2
2 États quantiques intriqués	3
2.1 TD. Démontrer si les états suivants peuvent être décomposés comme les produit tensoriel de deux états indépendants de dimension 2.	4
3 Non-localité quantique	4
4 Argument Einstein-Podolsky-Rosen	6
5 Les inégalités des Bell	8
5.1 TD. Faire le même calcul pour l'état quantique non intriqué $ ++\rangle$	11
5.2 TD. Démontrer l'inégalité de Bell précédente.	11
5.3 TD. Calculer l'inégalité de BELL pour l'état quantique non intriqué $ ++\rangle$	12
6 Mesures expérimentales	12

Résumé

Notes des cours "Intrication et EPR" de la formation ingénieur FISE IMT Atlantique. 2 séances de 1h15 : 1 séance de CM et 1 séance de TD. Dans la séance CM nous aborderons la création d'un espace de Hilbert à partir du produit vectoriel de deux espaces de Hilbert. Cette notion simple est importante car un microprocesseur quantique est représenté par un espace de Hilbert résultant du produit tensoriel de n qubits de dimension 2 (dimension du microprocesseur 2^n). Après une discussion un peu meta-physique mais bref sur la notion de la non-localité quantique (que notre

intuition a du mal à l'accepter) et après un rappel au postulat quantique de la mesure, nous introduirons la notion d'intrication et ses conséquences, et notamment dans le cas simple d'un espace de Hilbert de dimension 4 résultant du produit tensoriel de deux états de Hilbert de dimension 2. Cela sera appliqué au cas particulier de deux photons intriqués dans leur état quantique de polarisation et via cet exemple, nous présenterons la paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) et la notion des variables cachées. Quelques décennies plus tard, le physicien du CERN John BELL a eu l'audace d'imaginer une expérience dans laquelle une physique purement statistique supposant l'existence des variables cachées locales doit respecter des inégalités, qui ont reçu le nom des inégalités de Bell. En revanche, grâce à l'existence d'observable non mesurables au même temps, la physique quantique pourrait violer ces inégalités. Cette expérience permettra de réfuter un des arguments principaux de la paradoxe EPR, l'existence des variables cachées locales. Nous montrerons un exemple d'expérience et d'inégalité de Bell en utilisant la mesure du spin de deux particules spin 1/2 intriquées dans un état où le spin totale doit être 0. Le physicien Alain ASPECT a mené à bien la tâche de longue haleine de la mesure expérimentale qui, finalement, a donnée raison à l'interprétation quantique de la nature et lui a octroyé un Prix Noble bien mérité. Un grand merci au support inter-semestre du Professeur GOS-SIAUX (que vous trouverez sur le moodle du cours), à l'excellent livre de Michel LE BELLAC "Une introduction au Monde Quantique" (que vous trouverez dans le CARAE) et évidemment aux livres académiques de la physique quantique comme le livre *Mécanique Quantique I* de C. Cohen-Tannoudji, B Diu et F. Laloë, édition Hermann.

1 Le Produit Tensoriel

A partir de deux espaces de Hilbert représentés par l'ensemble de kets $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on pourra construire un espace produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. En supposant des espace de Hilbert discrète des dimensions n_1 et n_2 , dans le nouveau espace produit tensoriel, on peut facilement construire une base complète orthonormée $|u_k\rangle$, à partir de bases complètes orthonormées dans chaque espace $|u_{1i}\rangle$, $|u_{2j}\rangle$

$$|u_k\rangle = |u_{1i}\rangle \otimes |u_{2j}\rangle \quad (1)$$

avec, par exemple, $k = j + (i-1)*n_2$ avec $i = 1, \dots, n_1$ et $j = 1, \dots, n_2$. On peut procéder de manière similaire pour le produit tensoriel de deux espaces de Hilbert continus, voire le produit tensoriel d'un espace de Hilbert continu et un autre discret. Ce dernier cas est utilisé pour construire l'espace de Hilbert complet qui écrit une particule avec spin comme le produit tensoriel de l'espace continu de fonctions d'ondes dans l'espace et les états de spin : $|\psi\rangle = |\psi_{\text{espace}}\rangle \otimes |\psi_{\text{spin}}\rangle$. Dans le cas de la base de positions $\{|\vec{r}\rangle\}$ et un spin 1/2 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ les coefficients des $|\psi\rangle$ dans cette base est un vecteur de dimension 2 de deux fonctions d'onde :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(\vec{r}), \psi_-(\vec{r})) \quad (2)$$

Si les fonctions d'onde $\psi_+(\vec{r})$ et $\psi_-(\vec{r})$ sont différentes, on pourrait dire qu'il y a une intrication entre les espace des positions et le espace du spin. Si on mesure le spin et le

résultat et $|+\rangle$, l'intrication fera que la mesure du spin va projeter la fonctions d'onde dans l'état $(\psi_+(\vec{r}), 0)$, et réciproquement.

De factor, un cas très particulier de fonction d'onde dans l'espace $\mathcal{E}$ est représenté par le cas où la fonction d'onde on peut la représenter comme les produit tensoriels de deux fonctions d'onde de chaque espace $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Dans l'exemple précédent, les coefficients de la base de ce type d'états seront représentés comme

$$\psi(\vec{r}) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \right) \quad (3)$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Nous constatons que le dans l'équation (2), seulement si $\psi_+ + (\vec{r}) = \psi_+ + (\vec{r})$, on parle d'un état qui peut exprimé comme le produit tensoriel de deux états indépendants.

2 États quantiques intriqués

Mais revenons au cas du produit tensoriel de deux espaces de Hilbert les plus *simples* en physique quantique. Il s'agit d'un espace de dimension 2 avec deux états possibles $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Le produit tensoriel de ces deux espace sera un espace de dimension 4 et une base orthonormée pourra être défini par les états suivantes :

$$|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle \quad (4)$$

que l'on peut réécrire comme

$$|0\rangle_1 |0\rangle_2, |0\rangle_1 |1\rangle_2, |1\rangle_1 |0\rangle_2, |1\rangle_1 |1\rangle_2 \quad (5)$$

voire comme,

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \quad (6)$$

ou

$$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \quad (7)$$

Cette base permet par exemple de définir l'état de spin de deux particules, et en particulier, les états résultant d'un produit tensoriel des deux états seront écrits comme :

$$|\psi\rangle = \left(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_1} |1\rangle \right) \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\phi_2} |1\rangle \right) \quad (8)$$

donc

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |00\rangle + \quad (9)$$

$$\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i\phi_2} |01\rangle + \quad (10)$$

$$\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_1} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |10\rangle + \quad (11)$$

$$\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) e^{i(\phi_1+\phi_2)} |11\rangle \quad (12)$$

Etudions par exemple le cas de la fonction d'onde de spin :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (13)$$

nous réalisons que cet état ne pourra pas être décomposé comme le produit tensoriel des deux états.

2.1 TD. Démontrer si les états suivants peuvent être décomposés comme les produit tensoriel de deux états indépendants de dimension 2.

$$|\psi\rangle = |11\rangle \quad (14)$$

$$|\psi\rangle = |10\rangle \quad (15)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |10\rangle) \quad (16)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle) \quad (17)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \quad (18)$$

Comme l'état de l'équation 13 ne peut pas être décomposé dans un produit tensoriel de deux états, on dit que les états sont intriqués. Cette intrication implique que la mesure d'un des espace de spin va forcément projeter le spin de l'autre particule. Si la mesure de du spin de la particule 1 est 0, la mesure projettera la fonction d'onde dans $|\psi_{\text{post-mesure}}\rangle = |00\rangle$ donc le spin de la la particule 2 sera 0 également. Inversement si la mesure de du spin de la particule 1 est 1, la mesure projettera la fonction d'onde dans $|\psi_{\text{post-mesure}}\rangle = |11\rangle$, dont le spin de la particule 2 sera 1. L'intrication est de facto maximale.

3 Non-localité quantique

La non-localité quantique est sans doute une des propriétés la plus déroutante de la physique quantique. Cette non-localité quantique est imperceptible dans notre monde macroscopique dans lequel nous avons grandi et dans lequel nous avons accumulé un grand nombre d'expériences phénoménologiques. Un exemple, très emblématique, de la non-localité quantique est sans doute le mouvement d'un électron autour de noyau atomique. Ce mouvement est représenté par la notion d'orbitale atomique qui n'est que la fonction d'onde de l'électron dans un potentiel type de coulomb en première approximation. Il ne faut pas imaginer l'électron comme une particule faisant de tours autour du noyau, mais comme une particule qui est partout autour le noyau, avec une densité probabilité qui est donnée par le module au carrée de la fonction d'onde. Cette fonction d'onde est en plus une fonction imaginaire et cela est lié au comportement ondulatoire de la fonction d'onde

quantique qui permet des interférences constructives et destructives des fonction d'onde quantique :

$$c_t = c_1 + c_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} + \rho_2 e^{i\phi_2} = e^{i\phi_1} \left(\rho_1 + \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + i\rho_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \right) \quad (19)$$

du coup la probabilité associé à la linéarité quantique est

$$\mathcal{P}_t = |c_t|^2 = \left(\rho_1 + \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right)^2 + \rho_2^2 \sin^2(\phi_2 - \phi_1) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (20)$$

pour $\rho_1 = \rho_2 = 1/\sqrt{2}$

$$\mathcal{P}_t = 1 + \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (21)$$

et donc la probabilité n'est pas du tout additive et peut devenir même nulle, voire maximale.

Mais *revenons à nos moutons*, nous devons imaginer l'électron dans l'atome comme une particule qui est partout autour le noyau, avec une probabilité qui est donnée par le module de la fonction d'onde. Or notre intuition nous fait imaginer l'électron quelque part autour du noyau à chaque instant. Elle est plus forte que nous cette intuition. *A priori* rien empêche d'imaginer des conditions expérimentales, irréalisables avec la technologie d'aujourd'hui pour délocaliser le centre de masse d'un objet macroscopique comme une balle de tennis. A ce jour cela a pu être fait pour une molécule avec de milliers d'atomes.

Un autre exemple de non-localité quantique est représenté par un état à deux photons qui sont intriqués dans l'espace de polarisation et qui ont de quantité de mouvement opposés (*back-to-back*). Suite à certains processus il est possible générer deux photons un sens opposés qui par conservation du moment angulaire ont la même polarisation. La polarisation d'un photon est lié à son état de spin. Le photon est une particule de spin 1, donc normalement 3 états de spin sur une direction c'est-à-dire l'état de spin devrait être décrit par des états dans un espace de Hilbert de dimension 3 : $|+\rangle$, $|0\rangle$ et $|-\rangle$. Cependant, le fait que le photon est de masse nulle donc voyageant à la vitesse de la lumière, interdit, de facto, l'état $|0\rangle$. Du coup l'état de polarisation du photon est décrit par un état quantique dans un espace de Hilbert de dimension 2. Si on choisi comme direction de quantification du spin la direction de l'impulsion du photon, ce que l'on appelle dans le jargon de la physique de particules et nucléaire la *hélicité* du photon, dont *hélicité droite* (+) et *hélicité gauche* (-). Les deux photons émis *back to back* auront des *hélicités* identiques si, par exemple, le moment angulaire total initial avant la génération de deux photons, était nulle. Dans l'espace de polarisation des deux photons (produit tensoriel des état de spin de chaque photon), l'état de spin est décrit par l'état quantique :

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|++\rangle + |--\rangle \right) \quad (22)$$

et comme nous avons dit précédemment, cet état représente deux photons intriqués dans le espace de spin.

Imaginons maintenant que nous laissons voyager chaque photon en direction opposée pendant une longue distance et que la *hélicité* du photon 1 est mesurée. La mesure donnera

la hélicité du photon 1 avec une probabilité 1/2 et va projeter l'état précédent dans un des états suivants :

$$|\psi_{12}^{\text{post-mesure}}\rangle = |++\rangle \quad (23)$$

ou

$$|\psi_{12}^{\text{post-mesure}}\rangle = |--\rangle \quad (24)$$

dans le deux cas, le fait de mesurer la hélicité du photon 1, va automatique projeter l'état quantique du photon 2, qui se trouve à des kilomètres de distance, sur une état bien défini de hélicité et on saura l'état de hélicité du photon 2. On pourra même téléphoner à notre collègue qui se trouve à des kilomètres de distance et lui dire le résultat de sa mesure avant qu'il la fasse, voire on pourra se mettre d'accord avec notre collègue pour qu'il fasse sa mesure après la notre, mais dans un lapsus de temps suffisamment court pour que la projection de la mesure du photon 1 sur le photon 2 se fasse a des vitesses supérieure à la vitesse de la lumière. De facto, on peut supposer que la projections de l'état du photon 2 a lieu instantanément après la mesure du photon 1. C'est une version de la non-localité quantique. Comment cela est possible ? Cela semble contre-intuitif.

Le respect de la causalité est vital dans toute théorie en physique. Autrement nous pourrions être capables d'empêcher notre naissance comme cela est merveilleusement présenté dans le film "Retour vers le futur" (*Back to the Future*), film de science-fiction américain réalisé par Robert Zemeckis, et sorti en 1985 quand j'étais plus jeune que vous aujourd'hui. La causalité est un détail important et aujourd'hui toute théorie physique la respecte, même la physique relativiste que nous permet de voyager dans le temps selon notre référentiel, mais qui interdit toujours qu'un événement 1 puisse avoir avec une conséquence sur un autre événement 2 qui pourrait avoir une conséquence sur l'événement 1. Comme M. LE BELLAC l'explique très bien dans son livre *Une introduction au Monde Quantique* (allez vite le lire si le sujet vous intéresse) certains phénomènes peuvent se promener à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière, mais cela n'implique pas forcément une violation de la causalité. L'exemple qu'il donne est le déplacement d'un point lumineux sur la surface de la lune d'un laser émis depuis la terre. Plusieurs observateurs lunaires, après s'être mis en contact, pourront constater et mesurer un déplacement du point lumineux à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Même après une discussion avec la ou le terrien qui manipule le laser, l'observateur 2 qui détecte le laser saura à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière que l'observateur 1 a détecté le laser. La chose qui est importante dans cette discussion, et qui s'applique aussi dans le cas de la non-localité quantique, est le fait que nous ne pouvons transmettre d'information à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, est, en conséquence, la causalité est respecté dans le deux cas.

4 Argument Einstein-Podolsky-Rosen

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen ont publié un article (voir l'article original [ici](#) et sur le moodle) avec le titre *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete ?* qui formulait une paradoxe, connue comme paradoxe EPR, en supposant une certaine définition de la réalité physique et des observables qui ne commutent

pas (principe d'indétermination). Pour résoudre cette paradoxe il fallait conclure que la mécanique quantique n'est pas une théorie complète.

Au delà de la paradoxe elle-même, l'article EPR mets le doigt sur deux questions centrales :

1. Tout d'abord, cet article me le doigt sur la question de la mesure en physique quantique et donc la notion de réalité. La physique quantique nous dit que la mesure a forcément un impact sur le système car elle fait projeter le système sur un état propre de l'observable. Cette projection est aléatoire selon une probabilité donnée par le carré du coefficient de l'état quantique du système sur la base de état propres de l'observable. Cette notion d'une réalité intrinsèquement aléatoire est déroutante et nous pose la question clef du moment dans lequel la projection (la mesure) a lieu. Personne a répondu à cette question et l'idée légitime de décrire l'évolution de notre l'Univers depuis le Big Bang selon la physique quantique nous amène à l'idée vertigineuse que toutes les réalités possibles ont lieu en parallèle. Je ne suis pas expert du sujet. Des nombreux physiciens se sont attaqués à ce problème afin de décrire la mesure quantique, mais ce problème reste ouvert. C'est sûrement un problème méta-physique, car cela n'empêche pas à la physique quantique faire aujourd'hui des prédictions parmi les plus précises de toutes les théories en Physique.
2. Cet article formule le concept des variables cachées. L'idée est simple et plait notre intuition du monde macroscopique dans le sens que derrière chaque état quantique se *cachera* en fait une (ou plusieurs) variable(s) aléatoire(s) λ (au sens de la physique statistique) qui pré-déterminent les résultats des futures mesures. Ces variables peuvent alors être conçues comme le résultat d'une dynamique inaccessible à notre échelle mais déterministe, en reprenant la fameuse phrase de Einstein *Dieu ne joue pas aux dés*. *A priori*, rien nous empêcherait de considérer cette plausibilité, car l'approche des variables cachées permettrait de reproduire les résultats de l'interprétation usuelle de Copenhague. On verra dans la suite que l'audace de certains chercheurs, notamment le physicien du CERN John BELL, a permis d'imaginer des expériences quantitatives dans lesquelles la prédiction de la théorie de variables cachées diffère de la prédiction quantique. Il s'agit des inégalités de Bell formulées 29 ans après la publication de l'article EPR (voir [ici](#) et dans le moodle).

Je reviens à la phrase de Albert EINSTEIN *Dieu ne joue pas aux dés*. Quand on jète un dés effectivement nous avons l'habitude d'utiliser la statistique, qui fonction d'ailleurs très bien. Même pour des dés truqués on pourrait définir des probabilités non équiprobables qui pourraient décrire à la perfection le comportement statistique d'un dés truqué. Pour le dés, il s'agit bien de probabilités, il n'y a pas de fonction d'onde derrière la chute du dés et le fait que le dés finisse sur une ou une autres de ses 6 (pour un dés cubique) côtés possibles. De facto, nous pourrions s'intéresser à des variables plus précises comme la vitesse initiale, sa position 3D initiale de son centre de masse et de ses côtés, sa vitesse de rotation, le frottement avec l'air, la hauteur de la chute, les propriétés des matériaux du dés et de la table, etc. Normalement, avec toutes ces informations, nous devrions être capables de prédire exactement la position finale du dés lors de chaque essai et du coup on serait dans un déterminisme précis où il n'y a pas de place pour l'hasard. La question posée par

EPR est bien cela, y a-t-il de variables cachées que nous ne connaissons pas aujourd'hui et que le jour qu'elles seront découvertes, nous permettrons de prédire le résultat précis d'une mesure, ce qui aujourd'hui n'est pas possible avec la physique quantique qui serait en conséquence une théorie incomplète. C'est une question très légitime, motivée par notre refus intuitif d'accepter une réalité physique qui permet plusieurs options de mesure en parallèle et que nécessairement pour sortir de l'incertitude, la mesure va perturber le système le faisant basculer dans une ou une autre valeur.

Dans le cas de la mesure du spin d'une particule de spin $1/2$ selon un axe de $\vec{a}$ une théorie de variables cachées affirmerait l'existence d'une fonction $A(\vec{q}, \vec{\lambda})$ qui prédit de façon déterministe la valeur qui sera mesurée du spin selon l'axe $\vec{a}$. Deux valeurs sont possibles $+1$ et -1 et du coup la mesure ne projette pas aucun état quantique, mais simplement sonde la valeur de λ de manière que :

$$\text{Si } \vec{\lambda} \in \Omega_+ \rightarrow A(\vec{a}, \vec{\lambda}) = +1 \quad (25)$$

$$\text{Si } \vec{\lambda} \in \Omega_- \rightarrow A(\vec{a}, \vec{\lambda}) = -1 \quad (26)$$

$$(27)$$

Nous pouvons facilement imaginer un modèle de variables cachées qui serait en accord avec les prédictions quantiques de la mesure du spin selon une direction $\vec{a}$.

En 1964, John BELL a conçu une expérience pour répondre à la question de variables cachées et plusieurs groupes se sont mis au boulot, notamment le groupe du physicien prix Nobel Alain ASPECT, pour trouver les technologies nécessaires pour réaliser cette expérience dans le laboratoire. Je vais maintenant spoiler la fin du film, en vous disant que la conclusion a été que la physique quantique est bien une théorie complète si on impose la localité des variables cachées. Notre notion de réalité macroscopique reçoit une belle claque et nous laisse avec la bouche ouverte devant les fondements quantiques sur lesquels s'appuie notre notion de réalité physique. La physique quantique présente finalement une propriété unique qui est l'intrication entre deux particules différentes. Cette intrication permet que l'action de mesure sur une particule "A" puisse avoir un effet sur la mesure d'une particule "B" située à des kilomètres de distance, et cela de façon instantané. C'est la non-localité quantique. Rappelons que cette propriété unique et déroutante de la physique quantique n'est pas en contradiction avec le respect de la causalité de la théorie car l'intrication quantique ne permet pas la transmission des informations à des vitesses supra-lumineuses. Il est intéressant de mentionner que l'intrication quantique a un rôle crucial dans le calcul quantique où des nombreuses intrications entre *qubits* sont présents et la mesure de l'état d'un qubit aura de conséquences sur la mesure des autres qubits du processeur quantique.

Essayons maintenant de comprendre ce que John BELL a formulé exactement. Par simplicité, nous allons le faire d'un système quantique de dimension 2, le plus simple qui existe. Nous allons supposer la mesure du spin d'une particule de spin $1/2$, problème analogue à la mesure de la polarisation du photon, plus facile à manipuler expérimentalement.

5 Les inégalités des Bell

Dans le cas d'un système quantique de dimension 2, comme l'espace de Hilbert pour décrire les états quantiques d'un spin $1/2$ d'une particule, seulement deux états sont pos-

sibles. Si on génère un état intriqué avec deux particules de spin 1/2 et avec un spin total 0, l'état quantique intriqué aura cette expression :

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (28)$$

Nous allons maintenant faire deux mesures indépendantes : la mesure du spin de la particule 1 selon la direction $\vec{a}$ et la mesure du spin de la particule 2 selon la direction $\vec{b}$. Chaque mesure est liée à un observable qui est représenté par une matrice. Dans le espace $\mathcal{E}_1$, il s'agit d'une matrice 2×2 :

$$\hat{S}_{\vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{\hat{S}} = a_x \hat{S}_x + a_y \hat{S}_y + a_z \hat{S}_z \quad (29)$$

où $\hat{S}_i$ sont les matrices de Pauli. On supposera $a_y = 0$ par la suite et en angle θ_a entre l'axe z et $\vec{a}$, donc une mesure de spin dans un axe perpendiculaire à l'axe y, direction de propagations des particules en sens opposé.

Pour rappel, les états propres de $\hat{S}_{\vec{a}}$ pour $a_y = 0$ et angle θ_a s'expriment comme :

$$|+\vec{a}\rangle = \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|-\rangle \quad (30)$$

$$|-\vec{a}\rangle = -\sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|+\rangle + \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|-\rangle \quad (31)$$

$$(32)$$

La même chose pour l'observable $\hat{S}_{\vec{b}}$ de la particule 2.

Dans l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ les observables précédentes deviennent des matrices 4×4 :

$$\hat{S}_{1\vec{a}} = \hat{S}_{\vec{a}} \otimes \mathcal{I}_2 \quad (33)$$

$$\hat{S}_{2\vec{b}} = \mathcal{I}_1 \otimes \hat{S}_{\vec{b}} \quad (34)$$

$$(35)$$

où $\mathcal{I}_1$ ($\mathcal{I}_2$) sont les matrices identité dans les espaces $\mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_2$). Et évidemment $[\hat{S}_{1\vec{a}}, \hat{S}_{2\vec{b}}] = 0$, on peut mesurer le spin de chaque particule indépendamment.

Afin de calculer la probabilité de mesure + sur $\vec{a}$ et + sur $\vec{b}$ pour l'état intriqué de l'équation 28 en utilisant le postulat 4 de la mécanique quantique, nous devons exprimer l'état $|+\vec{a}+\vec{b}\rangle$ dans la base :

$$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \quad (36)$$

donc

$$\begin{aligned} |+\vec{a}+\vec{b}\rangle &= |+\vec{a}\rangle \otimes |+\vec{b}\rangle = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right)|-\rangle \right) \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|-\rangle \right) = \\ &= \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|++\rangle + \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|+-\rangle \\ &+ \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|-+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right)|--\rangle \end{aligned} \quad (37)$$

La probabilité de mesure $+$ sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour l'état intriqué est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(+_{\vec{a}}, +_{\vec{b}}) &= \left| \langle +_{\vec{a}} +_{\vec{b}} | \frac{1}{\sqrt{2}} (| + - \rangle - | - + \rangle) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right|^2 =\end{aligned}\quad (38)$$

$$\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (39)$$

De la même manière pour $| +_{\vec{a}} -_{\vec{b}} \rangle$

$$\begin{aligned}| +_{\vec{a}} -_{\vec{b}} \rangle &= | +_{\vec{a}} \rangle \otimes | -_{\vec{b}} \rangle = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) | + \rangle + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right) | - \rangle \right) \otimes \left(-\sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | + \rangle + \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | - \rangle \right) = \\ &= -\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | + + \rangle + \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | + - \rangle \\ &\quad - \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | - + \rangle + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right) | - - \rangle\end{aligned}\quad (40)$$

La probabilité de mesure $+$ sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour l'état intriqué est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(+_{\vec{a}}, -_{\vec{b}}) &= \left| \langle +_{\vec{a}} -_{\vec{b}} | \frac{1}{\sqrt{2}} (| + - \rangle - | - + \rangle) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right|^2 =\end{aligned}\quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (42)$$

Donc

$$\mathcal{P}(+_{\vec{a}}, -_{\vec{b}}) = \mathcal{P}(-_{\vec{a}}, +_{\vec{b}}) = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (43)$$

$$\mathcal{P}(-_{\vec{a}}, -_{\vec{b}}) = \mathcal{P}(+_{\vec{a}}, +_{\vec{b}}) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (44)$$

Il est intéressant de constater que :

$$\mathcal{P}(+_{\vec{a}}) = \mathcal{P}(+_{\vec{a}}, +_{\vec{b}}) + \mathcal{P}(+_{\vec{a}}, -_{\vec{b}}) = \quad (45)$$

$$\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (46)$$

et pareil pour $\mathcal{P}(-\vec{a}) = \mathcal{P}(+\vec{b}) = \mathcal{P}(-\vec{b}) = 1/2$.

On constate une corrélation entre le mesure car

$$\mathcal{P}(+\vec{a}, +\vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \neq \mathcal{P}(+\vec{a}) \cdot \mathcal{P}(+\vec{b}) = \frac{1}{4} \quad (47)$$

sauf pour $\Delta\theta = \pi/2$

5.1 TD. Faire le même calcul pour l'état quantique non intriqué $|++\rangle$.

L'idée audacieuse du physicien John BELL consiste à supposer maintenant que la mesure du spin pour la particule 1 est faite dans un axe $\vec{a}$ o un axe $\vec{a}'$ et pour la particule 2 est faite dans un axe $\vec{b}$ o un axe $\vec{b}'$. Le choix de l'axe de la mesure entre $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ et entre $\vec{b}$ et $\vec{b}'$ est faite au dernier instant, une fois que les particules émises en sens opposées se sont éloigné est assez rapidement pour éviter une communication infra-luminale entre les mesures de chaque spin. En outre, les angles relatifs entre les différents axes sont égaux $|\theta_a - \theta_b| = |\theta_a - \theta'_b| = |\theta'_a - \theta_b| = |\Delta\theta|$. Dans le contexte de la théorie de variables cachées, la mesure au long de chaque axe est déterminé dès l'émission de deux particules et du coup 16 possibilités existent de mesure "+" ou "-" dans le 4 axes ($2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$) et évidemment la somme de la probabilité pour chaque combinaison possible de mesure est l'unité :

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(+\vec{a}, +\vec{b}, +\vec{a}', +\vec{b}') \\ &\mathcal{P}(+\vec{a}, -\vec{b}, +\vec{a}', -\vec{b}') \\ &\mathcal{P}(+\vec{a}, +\vec{b}, -\vec{a}', +\vec{b}') \\ &\mathcal{P}(+\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{a}', -\vec{b}') \\ &\dots 13 \text{ combinaisons} \\ &\mathcal{P}(-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{a}', -\vec{b}') \end{aligned}$$

Une des inégalités de Bell est la suivante :

$$\mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}') + \mathcal{P}(\vec{a}' = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a}' \neq \vec{b}') \leq 3 \quad (48)$$

5.2 TD. Démontrer l'inégalité de Bell précédente.

Dans le cadre de la physique quantique la mesure au long de $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ sont incompatibles est le principe d'indétermination interdit les deux mesures simultanées. En physique quantique, nous ne pouvons pas définir les 16 probabilités précédentes car par exemple l'option + sur $\vec{a}$ et sur $\vec{a}'$ n'a pas de sens. La physique quantique pourrait violer les inégalités de Bell.

Calculons chaque élément de l'inégalité de Bell précédente. La probabilité de mesurer un spin dans $\vec{a}$ égale au spin dans $\vec{b}$ est :

$$\mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}) = \mathcal{P}(+\vec{a}, +\vec{b}) + \mathcal{P}(-\vec{a}, -\vec{b}) = \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \quad (49)$$

et

$$\mathcal{P}(\vec{a} \neq \vec{b}) = 1 - \mathcal{P}(\vec{a}' = \vec{b}') = 1 - \sin^2 \left(\frac{3\Delta\theta}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{3\Delta\theta}{2} \right) \quad (50)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}') + \mathcal{P}(\vec{a}' = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a}' \neq \vec{b}') = \\ 3 \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{3\Delta\theta}{2} \right) = \end{aligned} \quad (51)$$

$$(52)$$

pour $\theta = 5\pi/4$ la physique quantique viole l'inégalité de Bell,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a} = \vec{b}') + \mathcal{P}(\vec{a}' = \vec{b}) + \mathcal{P}(\vec{a}' \neq \vec{b}') = \\ 3 \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{3\Delta\theta}{2} \right) = \\ 3 \sin^2 \left(\frac{5\pi}{8} \right) + \cos^2 \left(\frac{15\pi}{8} \right) = 3.414 > 3. \end{aligned} \quad (53)$$

donc on réfute l'hypothèse de variables cachées locales.

5.3 TD. Calculer l'inégalité de BELL pour l'état quantique non intriqué $|++\rangle$.

6 Mesures expérimentales

Dans les années 80 les mesures expérimentales, donc celles de l'équipe du physicien Alain ASPECT ont validé la prédiction de la physique quantique. Ces mesures ont été menées à bien avec la mesure de la polarisation des photons.

Vous trouverez plus d'information dans les planches du Prof GOSSIAUX que vous trouverez également dans le moodle d'IMT Atlantique.