IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

# Session Maths - Remise en jambes

Rentrée 2025

*25-27 septembre 2025*

Programme proposé

— 25 août en face-à-face - Intégration des fonctions continues par morceaux : changement de variable, IPP

— 26 août en autonomie - Calcul matriciel : déterminant, systèmes linéaires

— 27 août en face-à-face - Calcul différentiel : approximation, dérivées partielles, gradient, Hessienne

# Exercices à faire en autonomie - 26 août
# Calcul de limites

**Limites de référence** Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ des nombres réels strictement positifs.

| | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0^+$ | $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0^+$ | $\lim_{x\to 0^+} x^\beta \lvert\ln(x)\rvert^\alpha = 0^+$ |
| $\lim_{x\to-\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0^+$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ |

TABLE 1 – Limites de référence

### Exercice 12 - Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2)$

*rép.* 3

2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$

*rép.* $-1$

3) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

*rép.* 0

4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

*rép.* 0

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$

*rép.* $-2$

6) $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$

*rép.* 0

# Nombres complexes

### Exercice 13 - Opérations élémentaires sur les complexes

Mettre les complexes suivants sous la forme $z = x + y\mathrm{i}$ :

a) $z_1 = (4 - 3\mathrm{i})^2$,
b) $z_2 = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.
c) Calculer leur conjugué complexe.
d) Calculer leur module.

### Exercice 14 - Module et argument d'un nombre complexe

Mettre sous forme $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ et dessiner dans le plan complexe : On donnera l'argument principal (compris dans $]-\pi\ ,\ \pi]$).

**On utilise :** $z = x + iy = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ **avec** $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **et** $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$**,** $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$

a) $z_1 = 1$,
b) $z_2 = \mathrm{i}$,
c) $z_3 = -1$,
d) $z_4 = -\mathrm{i}$,
e) $z_5 = -1/2$,
f) $z_6 = 1 + \mathrm{i}$,
g) $z_7 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$,
h) $z_8 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

### Exercice 15 - Application des formules de Moivre et Euler pour la linéarisation

Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$

# Calcul matriciel

### Exercice 16 - Multiplication de matrices

On se donne deux matrices **A** et **B** définies par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 2 \\ -\mathrm{i} & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer la matrice transposée de **A**. **A** est-elle hermitienne ?

b) Calculer la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

### Exercice 17 - Opérations élémentaires sur les matrices

Calculer la trace et le déterminant des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

### Exercice 18 - Inversion d'une matrice carrée

Soit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Démontrer que $\mathbf{B}$ est inversible.
b) Calculer l'inverse de la matrice $\mathbf{B}$.
c) Valider le calcul en vérifiant la propriété reliant une matrice inversible et son inverse.

**Exercice 19 - Résolution d'un système linéaire à l'aide du calcul matriciel**

Soit $\mathbf{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de $\mathbb{R}^{n\times n}$. On cherche à déterminer l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ solution (sous réserve d'existence) du problème $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Discuter des conditions d'existence et résoudre le problème.

a) Sous quelle condition, le système admet-il une solution unique ?
b) Dans ce cas, donner une expression de la solution en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.
c) Application directe :

1- $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$

2- $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

3- $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

d) Résolution du problème :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

1- Vérifier l'existence d'une solution unique.

2- Résoudre le système par la méthode votre choix.

*Pour vous rafraîchir la mémoire ou découvrir la méthode du pivot de Gauss, consulter https ://www.youtube.com/watch ?v=LD6F26g2Gl4*