IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Session Maths - Remise en jambes - Réponses

Rentrée 2025

25-27 septembre 2025

Programme proposé

- 25 août en face-à-face - Intégration des fonctions continues par morceaux : changement de variable, IPP
- 26 août en autonomie - Calcul matriciel : déterminant, systèmes linéaires
- 27 août en face-à-face - Calcul différentiel : approximation, dérivées partielles, gradient, Hessienne

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 1 : Donner les primitives suivantes :

Sur $]0, +\infty[$, et $n \neq -1$, $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \qquad n \neq -1$

Sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + K$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + K$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + K$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + K$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + K$

Sur $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + K$

Soit u, une fonction continue de x sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

DONNER LES PRIMITIVES SUIVANTES SUR L'INTERVALLE DE VALIDITÉ

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + K$$

$$\int u'\, u^{-n} = \frac{u^{1-n}}{1-n} + K$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan(u) + K$$

Exercice 2 : Donner u en fonction de x et calculer les primitives

1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^3} \,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6} \,\mathrm{d}x$

Réponses :

1) On pose $u(x) = 4 + x^3$, $u'(x) = 3x^2$ on a donc la forme $1/3 \int u'/u$ et

$$\int \frac{x^2}{4+x^3} \, \mathrm{d}x = 1/3 \, \ln|4+x^3| + K$$

2) On pose $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$ on a donc la forme $1/3 \int u'/(1+u^2)$ et

$$\int \frac{x^2}{1+x^6} \, \mathrm{d}x = 1/3 \, \arctan(x^3) + K$$

Exercice 3 : sans se soucier de l'ensemble de dérivation, calculer la dérivée de la fonction f

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Réponse : $f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Réponse : $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

Réponse : $f'(x) = -\dfrac{\sin^2(x)}{(\sin(x) - x\cos(x))^2}$

Exercice 4 : Intégration par parties

Soit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, \mathrm{d}x$, $n \geq 0$.

1) Justifier que l'intégrale existe pour tout $n \geq 0$.

2) Calculer I_0 et I_1.

3) Exprimer I_n en fonction de I_{n-2}, pour tout $n \geq 2$.

4) Donner l'expression de I_5 et I_6 sous forme d'un polynôme en X, X une valeur à déterminer. Puis donner une valeur approchée de ces deux intégrales à 10^{-1} près.

Réponse :

1) $x^n \cos x$ est le produit de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle est donc intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, a et b finis. Ici $a = 0$ et $b = \pi/2$, donc I_n existe (c'est-à-dire donne un scalaire fini).

2) On a $I_0 = 1$ et $I_1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

3) Après deux IPP on obtient :

$$I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)\, I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

4) $X = \pi/2$, et

$$I_5 = X^5 - 20X^3 + 180X - 180$$

$$I_6 = X^6 - 30X^4 + 360X^2 - 720$$

On a $I_5 \simeq 34,6$ et $I_6 \simeq 0,6$.

Exercice 5 : Convergence

Examiner la convergence ou la divergence des intégrales suivantes. (On ne cherchera pas à les calculer).

$$i) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad ii) \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{\sinh(2x)}\,\mathrm{d}x$$

On rappelle que : $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Réponse :

i) La fonction $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale est généralisée à cause de la borne en $+\infty$. On doit étudier la convergence de l'intégrale sur des intervalles du type $[1, +\infty[$. On prend un équivalent en ne considérant que les termes de plus haut degré de cette fraction.

$\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3} \underset{\infty}{\approx} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et d'après le rappel, cette fonction est intégrable au voisinage de l'infini car $p = 3/2 > 1$. Par équivalence, l'intégrale donnée en i) est donc convergente sur $[1, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$.

ii) La fonction $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{\sinh(2x)}$ est généralisée en $x = 0$ et en l'infini. Nous devons donc étudier les intervalles du type $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Sur $]0,1]$, on peut lever l'indétermination en 0 par la règle de l'Hospital : $\lim_{x\to 0}\dfrac{P}{Q}=\lim_{x\to 0}\dfrac{P'}{Q'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{2\cosh(2x)}=\dfrac{1}{2}$. On intègre donc une fonction continue sur $[0,1]$, et l'intégrale existe sur cet intervalle. On peut aussi faire un DL au voisinage de 0 et on retrouve le même résultat.

Au voisinage de $+\infty$, on cherche un équivalent en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les polynômes, ainsi

$\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sinh(2x)}=\dfrac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}\overset{\infty}{\approx}2\mathrm{e}^{-x}$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2/\mathrm{e}$ fini.

Finalement, en recollant les deux intervalles, l'intégrale donnée en ii) converge.

Exercice 6 : intégration par parties

On note $\chi_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b]$.

Soit la fonction indicatrice $\chi_{[0,1]}$, et l'intégrale, notée I_n, définie par

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,\ln x\;\chi_{[0,1]}(x)\,dx$$

1. Montrer que la fonction $x\longmapsto|\ln x\;\chi_{[0,1]}(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Sol : la fonction est à support borné, elle est définie et continue sur $]0,1]$. Il faut donc étudier

   $$\int_{-\infty}^{\infty}|\ln x\;\chi_{[0,1]}(x)|\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}|\ln x|\,dx$$

   $$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-[x\ln x\,-x]_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\varepsilon-\epsilon+1)=1$$

   qui est finie donc la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0\le x\le 1\Longrightarrow 0\le x^n\le 1$ et en déduire que la fonction $x\longmapsto|x^n\,\ln x\;\chi_{[0,1]}(x)|$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Sol : pour $x\ge 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a $(x^n)'=nx^{n-1}\ge 0$, ainsi la fonction puissance

est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité est vérifiée.
Pour $x \in]0,1]$, on a donc $0 < |x^n \ln x| \leq |\ln x|$ et

$$|I_n| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n \ln x \, \chi_{[0,1]}(x)| \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\ln x \, \chi_{[0,1]}(x)| \, dx = 1$$

d'après la question 2. Donc la fonction $x \longmapsto |x^n \ln x \, \chi_{[0,1]}(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et I_n est définie.

3. Calculer I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   Sol : Intégrons par partie avec $u = x^n$, $u' = nx^{n-1}$ et $v' = \ln x$, $v = x \ln x - x$

   $$I_n = \int_0^1 x^n \ln x \, dx = [x^n(x \ln x - x)]_0^1 - n \int_0^1 x^n (\ln x - 1) \, dx$$

   $$= -1 - nI_n + n \int_0^1 x^n \, dx = -1 - nI_n + \frac{n}{n+1} = \frac{-1}{n+1} - nI_n$$

   Ainsi $I_n = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$.
4. Calculer I_0 et I_1 et vérifier la réponse de la question 3.
   Sol : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \epsilon^+) = -1$
   $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x \ln x \, dx = -1/4$ après une i.p.p.

Exercice 7 : changement de variable

Soient les fonctions f et g définies par, pour x réel :

$$f(x) = \frac{x}{x^4+1}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^4+4}$$

Justifier l'existence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx, \qquad J = \int_0^1 g(x) \, dx$$

et les calculer.
Réponse : f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Leur intégrale est définie sur un intervalle borné comme $[0,1]$, pour g. Pour f il faut vérifier au voisinage de $+\infty$. On a $f(x) \overset{\infty}{\approx} \frac{1}{x^3}$ qui est Riemann convergent. I et J sont donc définies.

On écrit : $f(x) = 1/2\ \frac{u'}{u^2+1}$ et $g(x) = 1/4\ \frac{v'}{v}$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^4 + 4$. Donc $I = 1/2[\arctan(x^2)]_0^{+\infty} = \pi/4$ et $J = 1/4[\ln(4 + x^4)]_0^1 = 1/4 \ln(5/4)$.