IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

# Session Maths - Remise en jambes

Rentrée 2025

*25-27 septembre 2025*

Programme proposé

- 25 août en face-à-face - Intégration des fonctions continues par morceaux : changement de variable, IPP
- 26 août en autonomie - Calcul matriciel : déterminant, systèmes linéaires
- 27 août en face-à-face - Calcul différentiel : approximation, dérivées partielles, gradient, Hessienne

## Intégration des fonctions continues par morceaux - 25 août

**Exercice 1 : Donner les primitives suivantes :**

Sur $]0, +\infty[$, et $n \neq -1$, $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x =$

Sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x =$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \cos \,\mathrm{d}x =$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \sin \; \mathrm{d}x =$

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \; \mathrm{d}x =$

Sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int \ln x \; \mathrm{d}x =$

Soit $u$, une fonction continue de $x$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Donner les primitives suivantes sur l'intervalle de validité

$$\int \frac{u'}{u} =$$

$$\int u' \, u^{-n} =$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} =$$

**Exercice 2 : Donner $u$ en fonction de x et calculer les primitives**

1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^3} \; \mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6} \; \mathrm{d}x$

**Exercice 3 : sans se soucier de l'ensemble de dérivation, calculer la dérivée de la fonction $f$**

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

b) $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

**Exercice 4 : Intégration par parties**

Soit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, \mathrm{d}x$, $n \geq 0$.

1) Justifier que l'intégrale existe pour tout $n \geq 0$.

2) Calculer $I_0$ et $I_1$.

3) Exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n-2}$, pour tout $n \geq 2$.

4) Donner l'expression de $I_5$ et $I_6$ sous forme d'un polynôme en $X$, $X$ une valeur à déterminer. Puis donner une valeur approchée de ces deux intégrales à $10^{-1}$ près.

**Exercice 5 : Convergence**

Examiner la convergence ou la divergence des intégrales suivantes. (On ne cherchera pas à les calculer).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{\sinh(2x)} \, \mathrm{d}x$$

On rappelle que : $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

**Exercice 6 : intégration par parties**

On note $\chi_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$.

Soit la fonction indicatrice $\chi_{[0,1]}$, et l'intégrale, notée $I_n$, définie par

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \ln x \, \chi_{[0,1]}(x) \, dx$$

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto |\ln x \; \chi_{[0,1]}(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$ et en déduire que la fonction $x \longmapsto |x^n \, \ln x \; \chi_{[0,1]}(x)|$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $I_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer $I_0$ et $I_1$ et vérifier la réponse de la question 3.

**Exercice 7 : changement de variable**

Soient les fonctions $f$ et $g$ définies par, pour $x$ réel :

$$f(x) = \frac{x}{x^4+1}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^4+4}$$

Justifier l'existence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad J = \int_0^1 g(x)\, dx$$

et les calculer.