

Systèmes Quantiques Ouverts

Au programme

La Mécanique Quantique et les conséquences de l'environnement

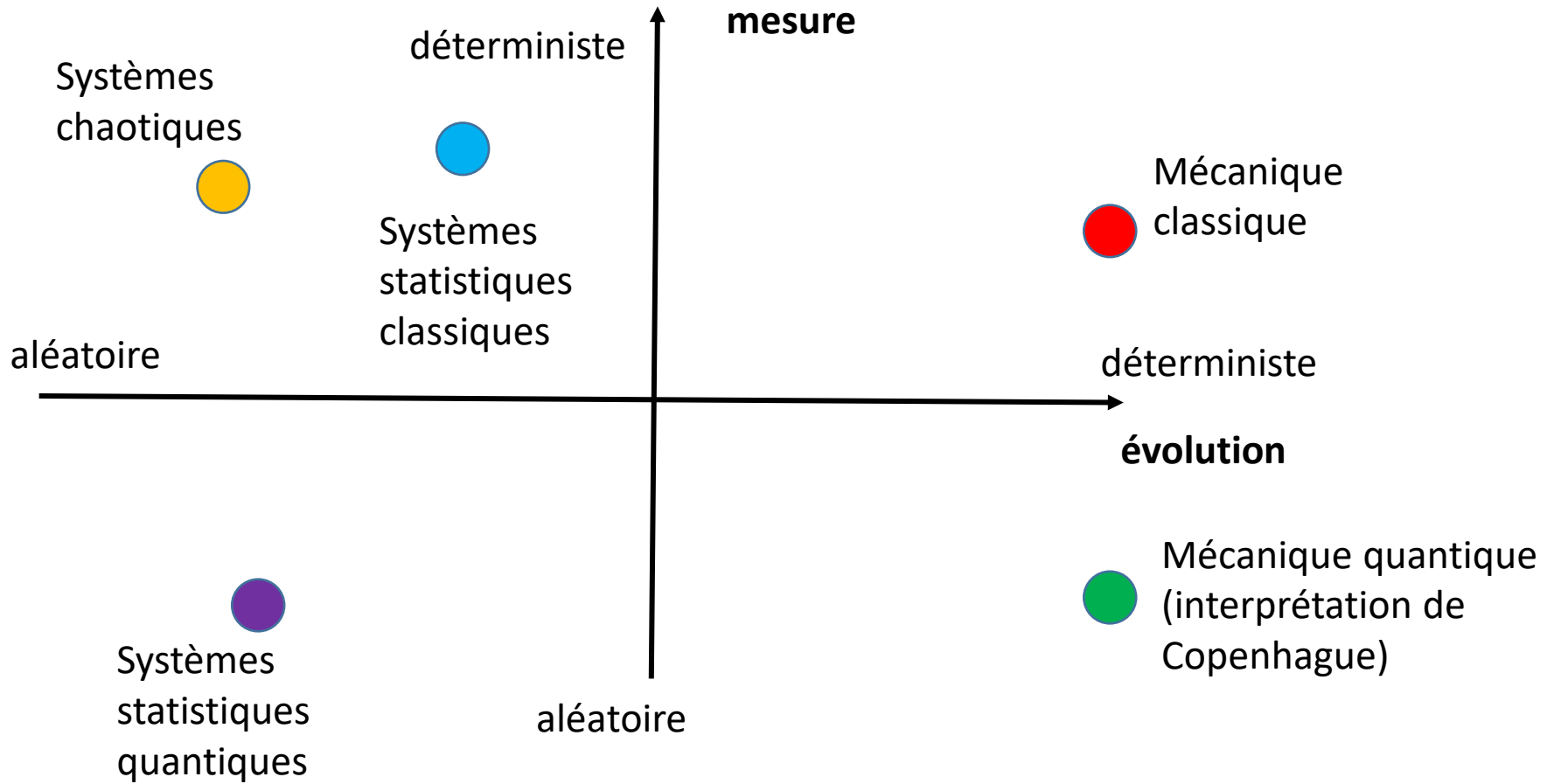
- Introduction à la problématique de la décohérence et des interaction entre un système quantique et son environnement
- Deux modèles simples de décohérence
- Considérations plus systématiques

Motivation

Pourquoi étudier l'interaction d'un système quantique
avec le reste du monde ?

- Afin d'identifier de nouveaux effets
- Parce qu'aucun système quantique ne peut être parfaitement isolé / fermé ... et que cette interaction a des conséquences concrètes importantes.

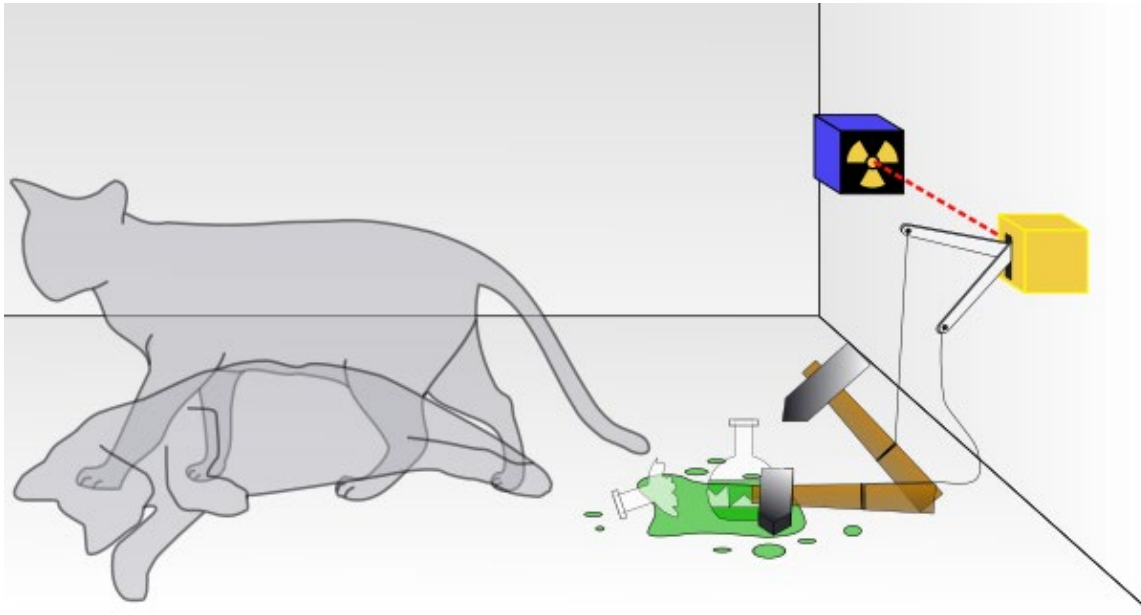
Déterminisme en physique



À quoi est dû le hasard ???

Point de vue de N. Bohr (interprétation de Copenhague)

La mesure physique de l'état ne peut être dissociée de l'appareillage de mesure, et cette cohésion doit être maintenue au sens strict => une description complète doit donc intégrer la fonction d'onde du photon ET l'appareillage de mesure.



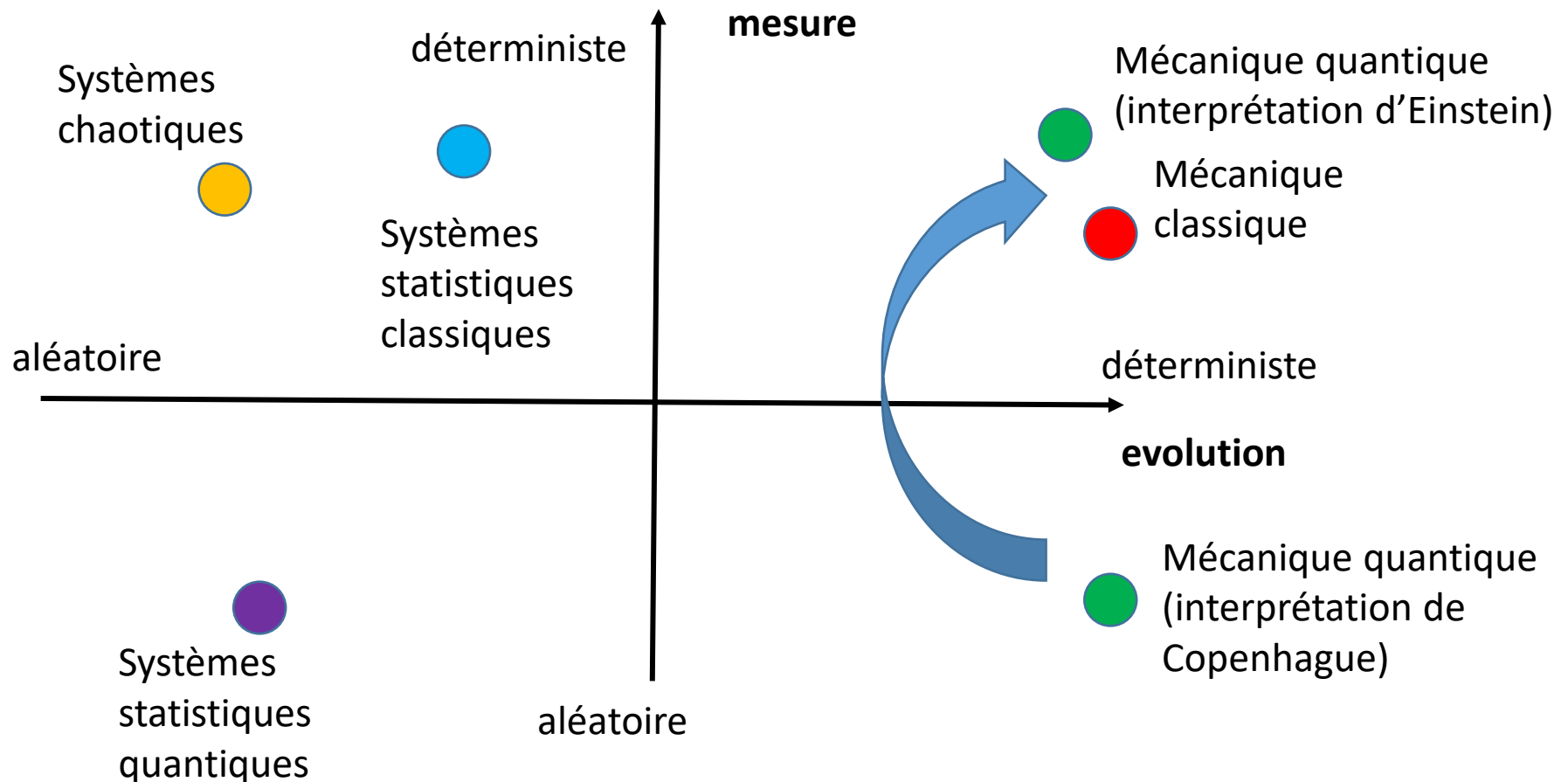
Suite à la désintégration radioactive, Le chat est-il vivant ou mort ? : tant que je ne regarde pas, je ne peux pas savoir...

Mais quand se passe la bifurcation, et quels éléments implique-t-elle ?

Et le chat là dedans, qu'en pense-t-il ?

Outre les questionnements philosophiques, une question plus pratique se pose : **“Comment une théorie déterministe de l'évolution peut-elle aboutir à une mesure aléatoire si l'appareil de mesure doit être intégré dans la description ?”** ou encore “Qu'est ce qui incarne les observables hermitiques ?”

Déterminisme en physique



En physique statistique, le “hasard” est dû à une partie masquée / perdue de l'information... Et si c'était pareil en mécanique quantique ? Notion de variables cachées... invalidées par les expériences d'Aspect.

Une bonne experience de physique



L'observatoire Borexino au Laboratoire national du Gran Sasso en septembre 2015.

Recherche de particules rares et furtives .



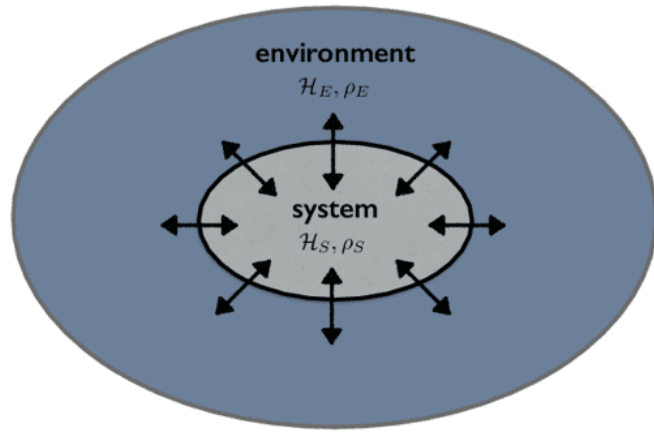
Besoin de s'isoler au maximum des rayonnements cosmiques et en général de l'environnement.



Paradigme du système isolé... aussi adopté par les fondations de la mécanique quantique et les “early experiments” (microscopique) ... mais difficultés conceptuelles dès que l'on va vers le macroscopique....

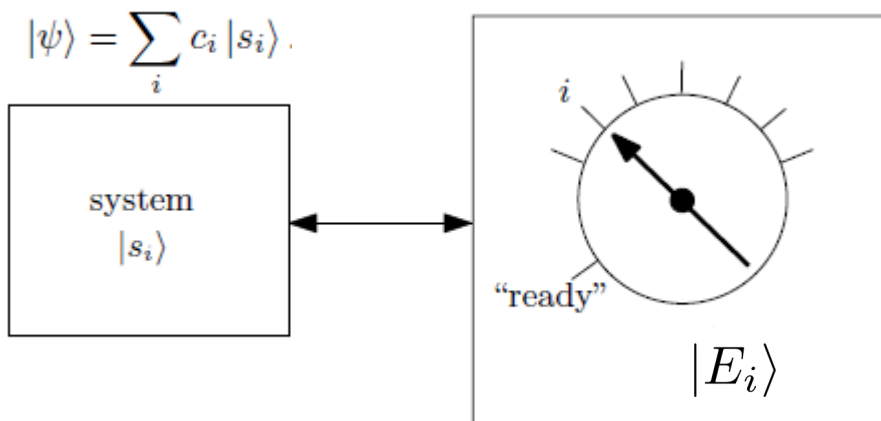
... Et de nos jours, micro et macro ne sont plus deux mondes bien séparés (importance du méso)

Intro: Decoherence & system-environment interaction



From B. Vacchini

- Since 1970
- Revisited all longstanding problems of quantum mechanics with a new paradigm : **quantum systems are naturally coupled to some external environment whose role cannot be ignored.**
- Starting from uncorrelated system – detector / environment state, the interaction between the system and the environment will build some global entangled state (environment is more than a mere perturbation)



Interaction with environment

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |E_0\rangle \xrightarrow{t=0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle |E_1\rangle + |\psi_2\rangle |E_2\rangle)$$

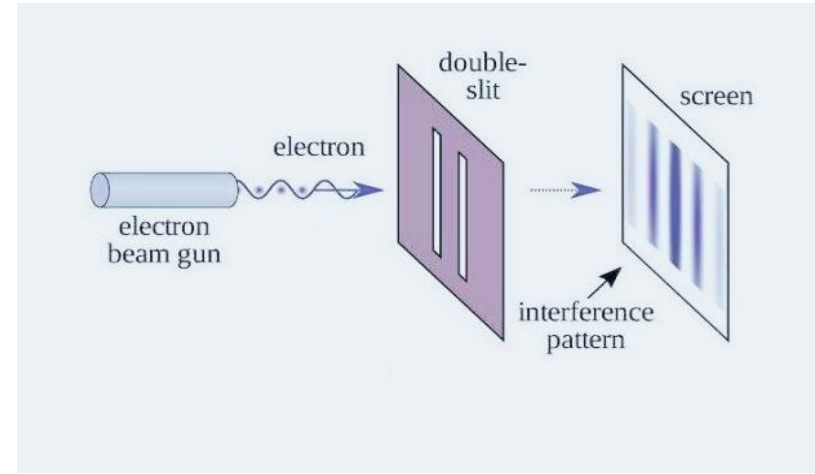
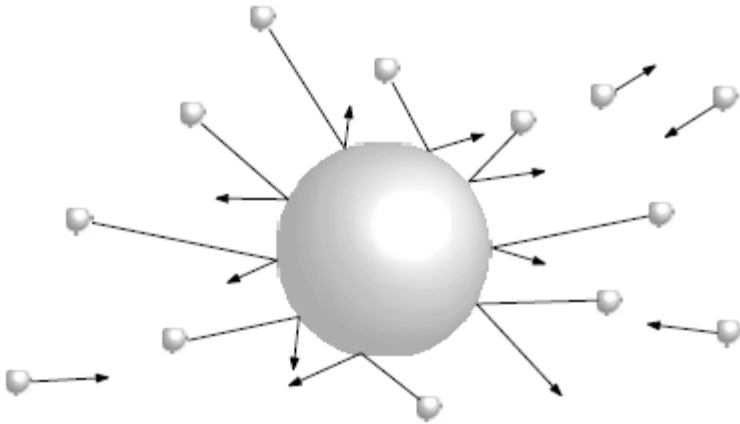
Entangled !

Coherence has been « delocalized » in the larger system (in a basis « invariant » way)... and this will translate into some effective decoherence of the quantum system.

N.B.: Such entanglement also applies in Von Neumann scheme for quantum measurement

Intro: Decoherence & system-environment interaction

- As postulated by Zurek : by interacting with different states of the quantum System, the environment outcome (in $|E_1\rangle, |E_2\rangle, \dots$) get the information about this system which can be considered as a genuine measurement of this system



Analogy with the 2 slots experiment and the « which state » observer... (played by the environment)

Quite effective for macroscopic systems

- Environment « measures » the system... and carry away part of its coherence
- This is the reason why a system usually evolves from « quantum like » to « classical like », over some decoherence time t_d (illustrations will be given)

Intro: Decoherence & system-environment interaction

Concepts importants :

- Superposition: $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ chaque état ψ_n est dans l'état total simultanément !
Equivalent à $\psi(\vec{x}) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{x})$ pour celles et ceux qui préfèrent les fonctions d'ondes
- Entanglement / intrication: Pour deux systèmes S1 et S2

$$\text{Intrication} \Leftrightarrow |\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Si $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ l'état quantique correspond à des systèmes indépendants (la mesure effectuée sur l'un n'affecte pas l'autre)

$$\text{Exemple : état de Bell : } |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2)$$

Intrication *maximale* : mesurer l'état du système 2 (l'environnement) permet également de réduire complètement la supersposition dans le système 1.

En general : $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle_1 |\phi_1\rangle_2 \pm |\psi_2\rangle_1 |\phi_2\rangle_2)$ intrication intermédiaire ;
l'intrication va se renforcer avec le temps.

Intro: Decoherence & system-environment interaction

Concepts importants :

- Matrice densité: On peut écrire $\bar{O} = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \text{tr} \left(\hat{O} | \psi \rangle \langle \psi | \right)$

On définit la **matrice densité** $\hat{\rho} := | \psi \rangle \langle \psi |$ et on écrit $\bar{O} = \text{tr} \left(\hat{O} \hat{\rho} \right)$

Exemple pour un espace de Hilbert de dimension 2:

$$| \Psi \rangle \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\rho} = | \Psi \rangle \langle \Psi | \equiv \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix}$$

- Sur la base des $|n\rangle$, les éléments de la diagonale de la matrice densité sont les poids “classiques” $|c_n|^2$, tandis que les termes non-diagonaux représentent les interférences.
- Normalisation : $\text{tr}(\hat{\rho}) = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 = 1$
- L’intérêt de la matrice densité est de permettre d’effectuer quelques opérations qui ne peuvent être définies sur un état quantique décrit par des fonctions d’ondes.

Intro: Decoherence & system-environment interaction

Concepts importants : Les moyennes statistiques

- Si une matrice densité peut s'écrire sous la forme $\hat{\rho} := |\psi\rangle\langle\psi|$, on parle d'état "pur"
(ne pas confondre avec un état intriqué)
- Etat pur = état quantique usuel qui peut être décrit par une fonction d'onde (ou un "ket") et "reproduit" sans incertitude "statistique"
- Quid des systèmes qui ne sont pas complètement déterminés (au sens usuel des fluctuations statistiques) ? Si chaque état $|\psi_i\rangle$ est préparé avec une probabilité (classique) p_i , on peut définir l'état dit "mixte" :

$$\hat{\rho} := \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$$

Intro: Decoherence & system-environment interaction

Concepts importants : Les moyennes statistiques

- Matrice densité: Exemple d'une expérience où spin up préparé dans 50% des cas et spin down dans 50% des cas :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- ... alors qu'expérience où superposition quantique :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad \Rightarrow \hat{\rho} = \dots?$$

- Dans ce cas

$$\bar{O} = \text{tr} \left(\hat{O} \hat{\rho} \right) = \sum_i p_i \bar{O}_i \quad \text{Moyenne double : quantique ET statistique}$$

!!! On ne peut pas toujours “remonter” aux valeurs des p_i et aux $|\psi_i\rangle$ sur la base de la matrice densité “mixte”; il n’y a pas de “base privilégiée”.

Intro: Decoherence & system-environment interaction

Concepts importants : La réduction : on intègre sur les variables du système 2 et on obtient une matrice densité (dite “réduite”) portant sur le système 1

- Définition : $\hat{\rho}_{i_1, i_2; i'_1, i'_2} \Rightarrow \hat{\rho}_{i_1; i'_1}^{\text{red}} := \sum_{i_2} \hat{\rho}_{i_1, i_2; i'_1, i_2}$

- Exemple de “reduction” : état de Bell $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2)$

↳ $\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) ({}_1\langle 0|_2 \langle 1| + {}_1\langle 1|_2 \langle 0|)$ 4 termes

↳ $\hat{\rho}^{\text{red}} = \frac{1}{2} (\underbrace{\langle 1|1\rangle_2}_{1} |0\rangle_{11} \langle 0| + \underbrace{\langle 0|0\rangle_2}_{1} |1\rangle_{11} \langle 1| + \underbrace{\langle 0|1\rangle_2}_{0} |0\rangle_{11} \langle 1| + \underbrace{\langle 1|0\rangle_2}_{0} |1\rangle_{11} \langle 0|)$

$$= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)$$

50% dans l'état $|0\rangle$ et 50% dans l'état $|1\rangle$

!!! Pas fondamentalement un état mixte

Coherence has been « delocalized » in the larger system (in a basis « invariant » way)... and this will translate into some effective decoherence of the quantum system.

Intro: Decoherence & system-env. interaction

Concepts importants :

- Matrice densité réduite: Supposons comme annoncé, que le système s'intrique avec l'environnement :

Interaction with environment

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle |E_1\rangle + |\psi_2\rangle |E_2\rangle)$$

Entangled !

- L'environnement étant complexe, on ne peut en general le mesurer, on peut juste effectuer des expériences sur le système... soit O_s une telle observable. On peut alors bien entendu écrire

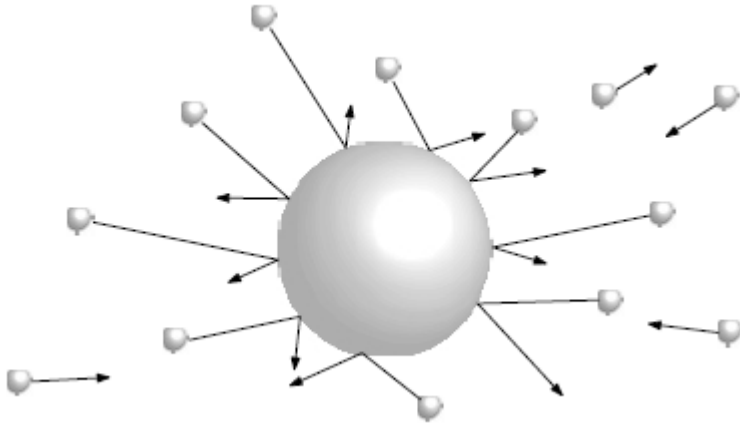
$$\bar{O}_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \psi_i | O_s | \psi_j \rangle \langle E_i | E_j \rangle$$

Dans l'espace de Hilbert du système

Dans l'espace de Hilbert de l'environnement

- ... mais on perd alors toute la matrice densité
- On préfère définir la matrice densité réduite $\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle E_i | E_j \rangle |\psi_j\rangle \langle \psi_i| \in \mathcal{H}_S^2$ telle que $\bar{O}_s = \text{tr}(\hat{\rho}_S O_s)$; il s'agit de la partie "observable" du système quantique complet.
- On note également $\hat{\rho}_S = \text{tr}_{\mathcal{E}} (\hat{\rho})$

Intro: Decoherence & system-env. interaction



The system gets intricated with the environment over time due to their mutual interactions

The environment acquires information from the various “states” of the system, in a irreversible way (think about the transitions):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle |E_1\rangle + |\psi_2\rangle |E_2\rangle)$$

N.B. : This is completely independent from any observer (moon’s existence does not depend on whether we observe it !)

- There exists a preferred ensemble of states ($|E_1\rangle, |E_2\rangle, \dots$) such that the interactions with the system leads to progressive (but « fast ») orthogonality $\langle E_1 | E_2 \rangle \sim 0$, as the environment acquires more and more « which path » information

Preferred basis or « pointer states » $\langle E_1 | E_2 \rangle \propto e^{-\frac{t}{t_d}}$ t_d : decoherence time

- Challenge : come with concrete physical models to support this picture and evaluate t_d

Intro: Decoherence & system-env. interaction

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle |E_1\rangle + |\psi_2\rangle |E_2\rangle)$$

Consequence on the reduced density matrix

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \xrightarrow{\text{Tracing out the environment}} \hat{\rho}_S = \text{tr}_E (|\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

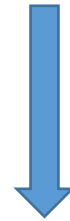
t=0

$$\hat{\rho}_S = \frac{\langle E_0|E_0\rangle}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|) \quad \hat{\rho}_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pure state}$$



t >> t_d

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \langle E_2|E_1\rangle |\psi_1\rangle\langle\psi_2| + \langle E_1|E_2\rangle |\psi_2\rangle\langle\psi_1|)$$



$$\hat{\rho}_S \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \approx 0 \\ \approx 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Coherence still present at the global level (entangled state)
- Not observable at the « local » (system) level
- Appears as a « decohered » / classical density (1/2 for « 1 » state and 1/2 for « 2 » state)... in a irreversible way.

Appears as **quasi classical mixed state**

Intro: Decoherence & system-env. interaction

Limitation importante:

La décohérence ne résoud pas le problème des aspects aléatoires des “résultats” de mesures.

En gros, elle explique pourquoi le chat ne peut pas être vivant et mort à la fois, mais ne permet pas d'expliquer ce qui fait qu'on l'observe vivant ou mort !

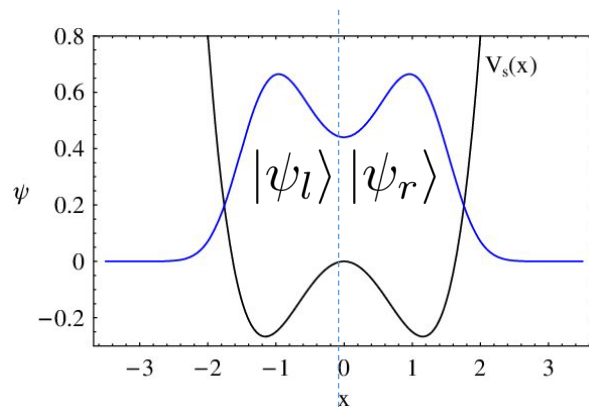
Intro: Decoherence & system-env. interaction

$$t \gg t_d$$

- Disappearance of interferences
- Measurements (and dynamics) in terms of classical probabilities
- ... **but in the system states that are the best « measured » by the environment the so-called pointer states (preferred basis) !**

(superselection rule)

Extra (2nd lecture) Link between decoherence and « suppression »



Case A: Ground state of double well potential put in contact with environment...

Assume $|\psi_1\rangle = |\psi_l\rangle$ and $|\psi_2\rangle = |\psi_r\rangle$ are 2 pointer states

$$|GS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \quad \hat{\rho}_{GS} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(GS, t = 0) = 1 &\longrightarrow \text{prob}(GS, t \gg t_d) = \text{tr}(\hat{\rho}_S(t) \cdot \hat{\rho}_{GS}) \\ &\approx \text{tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Decoherence $\equiv$ suppression

Intro: Decoherence & system-env. interaction

$$t \gg t_d$$

- Disappearance of interferences
- Measurements (and dynamics) in terms of classical probabilities
- ... **but in the system states that are the best « measured » by the environment the so-called pointer states (preferred basis) !**

Extra (2nd lecture): Link between decoherence and « suppression »

(superselection rule)

Case B: compact state put in contact with environment...

Assumes preferred states : {eigenstates of the system Hamiltonian}

$$|\Psi\rangle = \underbrace{(\sqrt{p_{\text{GS}}}\psi_{\text{GS}} + \sqrt{p_1}\psi_1 + \dots)}_{|\psi\rangle} |E_0\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(\text{GS}, t = 0) = p_{\text{GS}} &\longrightarrow \text{prob}(\text{GS}, t \gg t_d) = \text{tr}(\hat{\rho}_S(t) \cdot \hat{\rho}_{\text{GS}}) \\ &\approx \text{tr} \left(\begin{pmatrix} p_{\text{GS}} & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\approx p_{\text{GS}} \end{aligned}$$

Decoherence : $\neq$ suppression

: just « reveals » the various components of the initial eigenstate

Intro: Decoherence & system-env. interaction

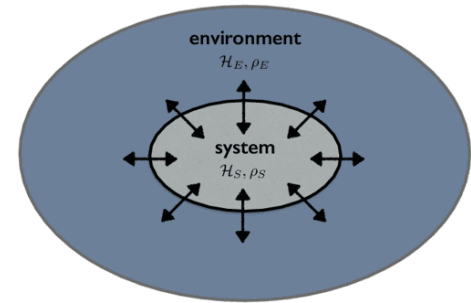
First conclusion from the study of usual decoherence scheme :

- ✓ Essential to characterize the « preferred states » : *maximally robust against decoherence*
- ✓ Need to (semi)-quantify the decoherence time

➡ Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$

Interaction hamiltonian btwn S and E

Usual linear coupling: $\hat{H}_{\text{int}} = g \sum_a \hat{S}_a \otimes \hat{E}_a$



Time scales :

τ_S : Time scale associated to the system (indep. Environment)

$$\tau_S \sim \frac{1}{\Delta E_S} \quad \equiv \text{Heisenberg time (mind if discrete states + continuous)}$$

Energy gap

τ_E : Time scale associated to the environment (indep. System)

$$\tau_E \sim \frac{1}{T} \quad (\text{for instance})$$

Temperature

τ_R : System relaxation time scale resulting from interaction with the env. (in general $\neq \tau_d$!)



When $\tau_E \ll \tau_S$: Environnement perçu par le système comme un ensemble de bruits aléatoires (chocs rapides)

Intro: Decoherence & system-env. interaction

Standard textbook (M. Schlosshauer) results for OQS:

✓ 3 regimes :

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$$

Name	condition	Consequence for Preferred States
quantum-measurement limit	Evolution of the system dominated by H_{int}	PS: eigenstates of H_{int} (often : $\Leftrightarrow$ positions)
The intermediate regime	evolution of the system governed by H_{int} and H_S in roughly equal strengths	PS: localized in phase space, i.e., in both position and momentum
The quantum limit of decoherence.	The environment is slow and the Hamiltonian H_S dominates the evolution of the system	PS: Eigenstates of H_S

Modèle simple de décohérence

Modèle simple...:

✓ On considère un spin plongé dans un champ magnétique aléatoire

✓ Le Hamiltonien s'écrit : $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t) = \dots = \vec{f}(t) \cdot \vec{\sigma}$

Matrices de Pauli

« Force » aléatoire locale en temps

✓ Equation de Schrödinger *stochastique* : $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(t)\psi$

✓ Solution formelle : $\psi(t, \{\vec{f}\}) = T \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t') \right) \psi(0)$

Produit ordonné en temps

✓ Deux difficultés :

- Calcul concret pour une séquence de forces donnée.
- Comment se faire une vision “moyenne”

... solution pas si simple !

Deux moyennes : stochastique et quantique

Modèle simple de décohérence

Opérateur densité:

- ✓ On définit l'opérateur $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$
- ✓ L'intérêt de cet opérateur est de pouvoir encoder plus simplement les moyennes

Moyenne quantique

↑

$$\langle \bar{O} \rangle = \langle \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \rangle = \langle \text{tr}(\hat{O} \hat{\rho}) \rangle = \text{tr}(\hat{O} \langle \hat{\rho} \rangle)$$

Moyenne sur les forces
stochastiques

- ✓ On peut donc gérer l'aspect “moyenne sur les forces stochastiques” en considérant l'opérateur densité “moyenné” $\langle \hat{\rho} \rangle$ et son évolution
- ✓ Evolution de $\hat{\rho}$:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{i}{\hbar} |\psi\rangle\langle\psi| \hat{H} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{\rho} + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho} \hat{H} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \mathcal{N}(\hat{\rho})$$

Equation de Von Neumann

Modèle simple de décohérence

Opérateur densité:

✓ Pour le spin :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}^* & \psi_{\downarrow}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_{\uparrow}} & \psi_{\uparrow}\psi_{\downarrow}^* \\ \psi_{\uparrow}^*\psi_{\downarrow} & \boxed{\rho_{\downarrow}} \end{pmatrix}$$

Densité de spin up
↓
↑
Densité de spin down

Modèle simple de décohérence

Opérateur densité:

✓ Pour le spin :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}^* & \psi_{\downarrow}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow} & \boxed{\psi_{\uparrow}\psi_{\downarrow}^*} \\ \boxed{\psi_{\uparrow}^*\psi_{\downarrow}} & \rho_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Terme d'interférence

Terme d'interférence

$$\langle\hat{\rho}\rangle = \begin{pmatrix} \langle\rho_{\uparrow}\rangle & \langle\psi_{\uparrow}\psi_{\downarrow}^*\rangle \\ \boxed{\langle\psi_{\uparrow}^*\psi_{\downarrow}\rangle} & \langle\rho_{\downarrow}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow} & \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow} \\ \langle\hat{\rho}\rangle_{\downarrow\uparrow} & \langle\hat{\rho}\rangle_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad \text{où tous les termes sont considérés comme des moyennes stochastiques}$$

Plus factorisable

4 composantes

Equation dynamique pour $\langle\hat{\rho}\rangle$: besoin d'hypothèses physiques supplémentaires : variation rapide des forces et évolution "lente" de $\langle\hat{\rho}\rangle$ (hypothèse markovienne)

=> On va réaliser les moyennes stochastiques "localement en temps"

=> Besoin d'un développement à l'ordre 2 en temps pour intégrer les corrélations.

Modèle simple de décohérence

Evolution à l'ordre 2:

✓ Développement Taylor : $\hat{\rho}(t + dt) = \hat{\rho}(t) + dt \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2}$

✓ Avec : $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2} &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{i}{\hbar} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \hat{H} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{\rho} + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho} \hat{H} \right) + \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{\rho} + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho} \hat{H} \right) \hat{H} \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left(2\hat{H} \hat{\rho} \hat{H} - \hat{H}^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}^2 \right) \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{\rho}_{ij}}{dt^2} &= \sum_{kl} \frac{1}{\hbar^2} \left(2\hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} \hat{\rho}_{kl} - (\hat{H}^2)_{ik} \delta_{jl} \hat{\rho}_{kl} - \hat{\rho}_{kl} \delta_{ik} (\hat{H}^2)_{lj} \right) \\ &= \sum_{kl} \frac{1}{\hbar^2} \left(2\hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} - (\hat{H}^2)_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} (\hat{H}^2)_{lj} \right) \hat{\rho}_{kl} \end{aligned}$$

✓ Moyennes stochastiques : $\langle \hat{H} \rangle = 0 \Rightarrow \langle [\hat{H}, \hat{\rho}] \rangle \Rightarrow \frac{d\langle \hat{\rho} \rangle}{dt} = 0$

Modèle simple de décohérence

Evolution à l'ordre 2:

✓ Développement Taylor $\hat{\rho}(t + dt) = \hat{\rho}(t) + dt \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2}$

Moyenne dépend des forces antérieures à t

$$\langle \hat{\rho} \rangle_{ij}(t + dt) = \langle \hat{\rho} \rangle_{ij}(t) + \frac{dt^2}{2\hbar^2} \sum_{kl} \left(2\langle \hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} \rangle - \langle \hat{H}^2 \rangle_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} \langle \hat{H}^2 \rangle_{lj} \right) \langle \hat{\rho} \rangle_{kl}(t)$$

$$\frac{d\langle \hat{\rho} \rangle_{ij}}{dt} = \frac{dt}{\hbar^2} \sum_{kl} \left(\langle \hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{H}^2 \rangle_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \langle \hat{H}^2 \rangle_{lj} \right) \langle \hat{\rho} \rangle_{kl}$$

✓ Il ne reste plus qu'à calculer : $\hat{H} = \vec{f}(t) \cdot \vec{\sigma} \Rightarrow \langle f_a f_b \rangle = \frac{\eta \hbar^2}{dt} \delta_{ab}$ où $[\eta] = s^{-1}$

Auto-corrélation des forces stochastiques

$$\frac{dt}{\hbar^2} \langle \hat{H}^2 \rangle_{ik} = \eta \sum_{a,b} \delta_{ab} (\sigma^a \cdot \sigma^b)_{ik} = \eta \sum_a \underbrace{(\sigma^a \cdot \sigma^a)}_{=\mathbb{I}_2} = 3\eta \delta_{ik}$$

« diagonal »

$$\frac{dt}{\hbar^2} \langle \hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} \rangle = \eta \sum_{a,b} \delta_{ab} \sigma_{ik}^a \sigma_{lj}^b = \eta \sum_a \sigma_{ik}^a \sigma_{lj}^a = \dots$$

Modèle simple de décohérence

✓ Méta indices:

$$\langle \hat{\rho} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \hat{\rho} \rangle_{\uparrow} & \langle \hat{\rho} \rangle_{\uparrow\downarrow} \\ \langle \hat{\rho} \rangle_{\downarrow\uparrow} & \langle \hat{\rho} \rangle_{\downarrow} \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \eta \sum_a \sigma_{ik}^a \sigma_{lj}^a = \dots = \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ $\alpha = 3$
 $\alpha = 4$ $\alpha = 2$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix}$$

← Termes « densité »
 ← Termes d'interférence

Solution des équations :

- ✓ Décroissance progressive des termes d'interférence : $\rho_{\uparrow\downarrow}(t) = e^{-4\eta t} \rho_{\uparrow\downarrow}(0)$
- ✓ Conservation de la norme : $\rho_{\uparrow}(t) + \rho_{\downarrow}(t) = \text{cst}$
- ✓ Mélange des populations : $\rho_{\uparrow}(t) - \rho_{\downarrow}(t) = e^{-2\eta t} (\rho_{\uparrow}(0) - \rho_{\downarrow}(0))$

Modèle simple de décohérence

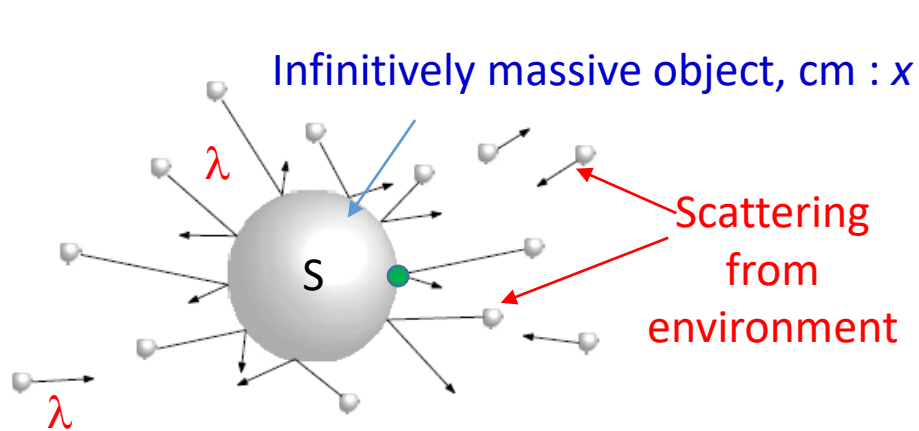
Solution des équations :

- ✓ État initial $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ $\Rightarrow \langle\hat{\rho}\rangle(t=0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- ✓ Après $t \gg \eta^{-1}$: $\langle\hat{\rho}\rangle(t) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Substitution des seuls termes « classiques » (quoiqu'aléatoires): probabilité de trouver le spin up ou down
- ✓ Décohérence quantique $\Leftrightarrow$ diffusion statistique.
- ✓ Comportement générique $\Rightarrow$ aussi vrai dans le cas de 2 spins intriqués
- ✓ Toute la question est la maîtrise de l'échelle temporelle $1/\eta$ (temps de relaxation)

$\Rightarrow$ Besoin d'un modèle plus réaliste

Autre modèle simple de décohérence

Quantitative model :



$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \boxed{\hat{H}_{\text{int}}}$$

Reduced density matrix $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$

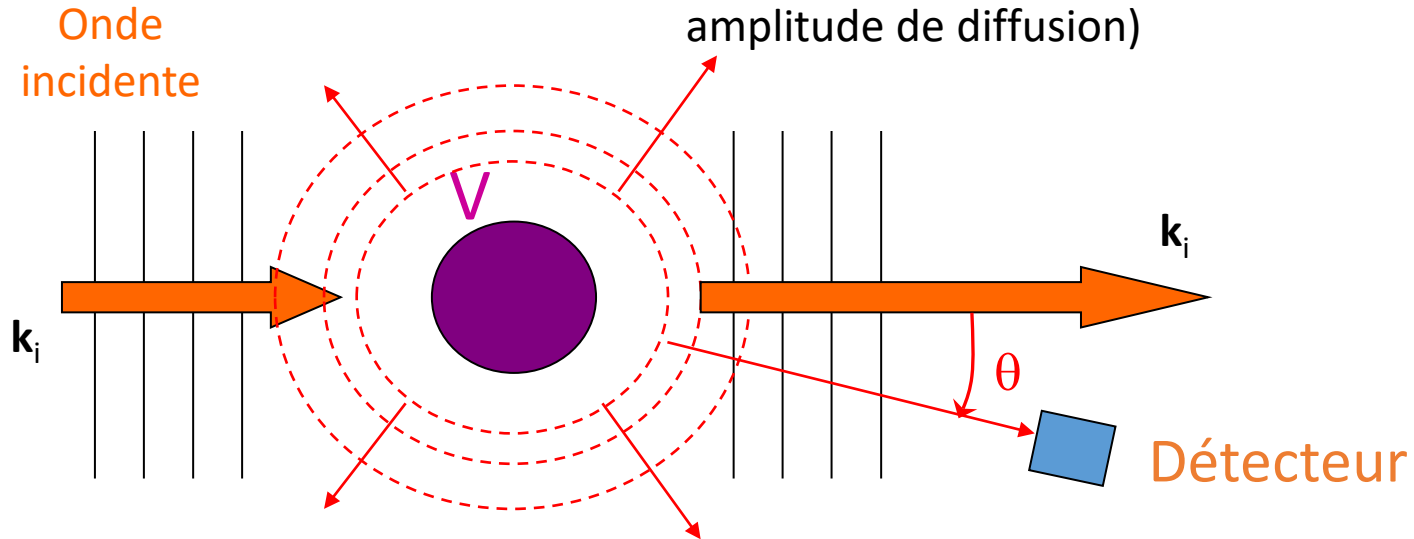
Some snapshots of the derivation...

N.B. : first model in “spin space”, second model in coordinate space

Préalable: Théorie de la diffusion

Onde défléchie par le H_{int} ; on a $k=|k_i|$ (conserv. Energ.)

(Onde sphérique modulée par le facteur directionnel f :
amplitude de diffusion)



Fonction d'onde stationnaire : $\psi \propto e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$

Vision dynamique : on transite en permanence depuis l'état initial (onde plane) -> état diffusé, avec un taux de collision régit par la *section efficace*.

Section efficace σ :

- ✓ nbre d'événements par unité de temps = flux de particules incidents Φ ($\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$) $\times \sigma$ (m^2)
- ✓ σ Traduit donc l'ampleur de l'interaction
- ✓ Section efficace différentielle (par unité d'angle solide): $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$

Préalable: Théorie de la diffusion

Diffusion d'un état entrant/initial en $t=-\infty \rightarrow$ un état sortant/final en $t=+\infty$:

$$|\text{in}\rangle \rightarrow |\text{out}\rangle = S|\text{in}\rangle$$

Définition de la matrice S .

L'évolution préserve la norme : $\langle \text{out} | \text{out} \rangle = \langle \text{in} | S^\dagger \cdot S | \text{in} \rangle = \langle \text{in} | \text{in} \rangle \Rightarrow S^\dagger \cdot S = \mathbb{I}$

On écrit : $S = \mathbb{I} + iT \Rightarrow$ l'unitarité entraîne alors $\hat{T}\hat{T}^\dagger + i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) = 0$.

Aucune diffusion
(vers l'avant)

Diffusion effective

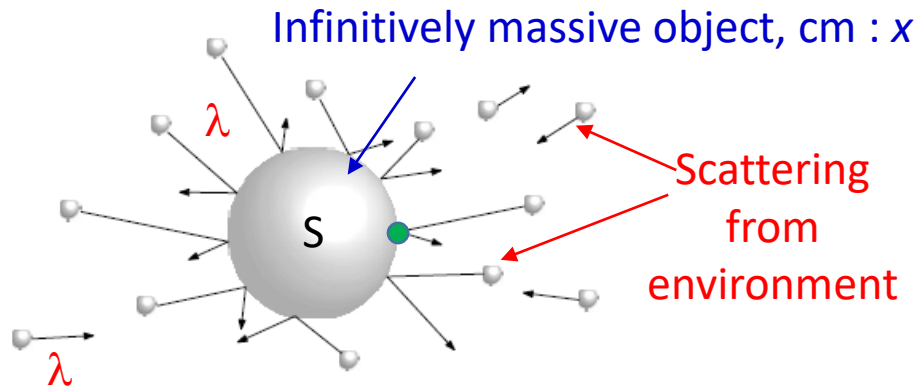
Transition de $q' \rightarrow q$

$$\langle q | \hat{T} | q' \rangle = \frac{i}{2\pi\hbar q} \delta(q - q') f(q, q') = \frac{i}{2\pi\hbar m} \delta(E - E') f(q, q')$$

Conservation de l'énergie (diffusion sur un objet massif)

Autre modèle simple de décohérence

Quantitative model :



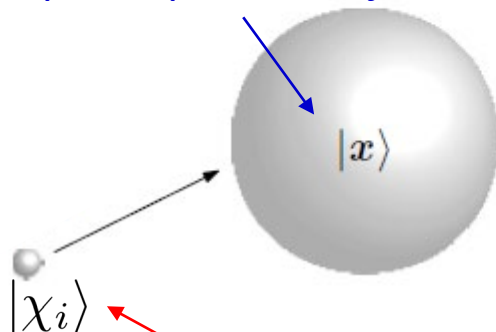
$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \boxed{\hat{H}_{\text{int}}}$$

Reduced density matrix $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$

Some snapshots of the derivation...

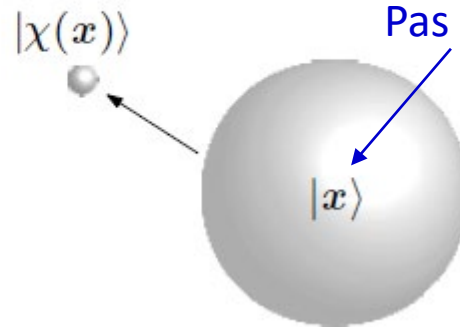
before

État quantique de l'objet



after

Pas de recul



État quantique de l'environnement; l'état final dépend de $|x\rangle$ (intrication !)

$$|x\rangle |\chi_i\rangle \longrightarrow \hat{S} |x\rangle |\chi_i\rangle = |x\rangle \hat{S}_x |\chi_i\rangle \equiv |x\rangle |\chi(x)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{S}_x \equiv e^{-i\hat{q}\cdot x/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{q}\cdot x/\hbar},$$

(translation de l'opérateur S_0 défini en $x=0$)

Autre modèle simple de décohérence

opérateur densité
“avant collisions”:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0) = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) \underbrace{|x\rangle\langle x'|}_{\text{système}} \otimes \underbrace{|\chi_i\rangle\langle\chi_i|}_{\text{Environ.}}$$

(pas d'intrication entre système et environnement)



opérateur densité
“après collisions”:

$$\hat{\rho} = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) |x\rangle\langle x'| \otimes |\chi(x)\rangle\langle\chi(x')|.$$

L'environnement emporte la coherence du système



opérateur densité réduit
“après collisions”:

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E \hat{\rho} = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) |x\rangle\langle x'| \underbrace{\langle\chi(x')|\chi(x)\rangle}_{\text{Recouvrement (Voir aussi planche 16)}}$$

Soit aussi

$$\rho_S(x, x', 0) \longrightarrow \rho_S(x, x', 0) \langle\chi(x')|\chi(x)\rangle$$

Il convient maintenant d'évaluer l'évolution du recouvrement...

Autre modèle simple de décohérence

Modèle pour le recouvrement...

$$\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle = \langle \chi_i | \hat{S}_{x'}^\dagger \hat{S}_x | \chi_i \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left\{ \hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) \hat{S}_{x'}^\dagger \hat{S}_x \right\} \quad \text{où} \quad \hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$$

État initial environnement

De manière plus générale: distribution de particules dans un volume V, avec densité de quantités de mouvement q :

$$\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) |\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle \chi(x') | \chi(x) \rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \langle \tilde{q} | \hat{S}_{x'}^\dagger \hat{S}_x | \tilde{q} \rangle \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \langle \tilde{q} | e^{-i\hat{q} \cdot x' / \hbar} \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{q} \cdot (x-x') / \hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{q} \cdot x / \hbar} | \tilde{q} \rangle \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) e^{i\hat{q} \cdot (x-x') / \hbar} \langle \tilde{q} | \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{q} \cdot (x-x') / \hbar} \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle . \end{aligned}$$

phase
↙
 $= e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} \times |\tilde{q}\rangle$
↻

On insère ensuite $\hat{\mathbb{I}} = \sum_{q' \in Q_V} |\tilde{q}'\rangle\langle\tilde{q}'|$ dans la chaîne =>

$$\langle \tilde{q} | \cdots | \tilde{q} \rangle = \sum_{q' \in Q_V} \langle \tilde{q} | \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{q} \cdot (x-x') / \hbar} | \tilde{q}' \rangle \langle \tilde{q}' | \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle = \sum_{q' \in Q_V} e^{-i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}') / \hbar} \underbrace{\langle \tilde{q} | \hat{S}_0^\dagger | \tilde{q}' \rangle \langle \tilde{q}' | \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle}_{\text{Probabilité de passage de } q \rightarrow q'}$$

Probabilité de passage de $q \rightarrow q'$ ₃₅

Autre modèle simple de décohérence

Modèle pour le recouvrement...

$$\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in \mathbf{Q}_V} \mu(q) \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbf{Q}_V} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} |\langle \tilde{q}' | \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle|^2$$

Premier constat physique : x et x' balaient la densité définissant la position du cm de l'objet.
Plus l'extension sera grande et plus $|x-x'|$ sera grand $\Rightarrow$ somme fortement oscillante $\Rightarrow$ moyenne nulle $\Rightarrow$ perte de coherence...

La coherence sur de grandes distances s'avère bcp plus "fragile"

On remplace maintenant $S_0 \rightarrow \mathbb{I} + iT$

$$\hookrightarrow |\langle \tilde{q}' | \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle|^2 = \underbrace{|\langle \tilde{q}' | \mathbb{I} | \tilde{q} \rangle|^2}_{\delta_{q,q'}} + i \underbrace{\langle \tilde{q} | \mathbb{I} | \tilde{q}' \rangle \langle \tilde{q}' | \hat{T} | \tilde{q} \rangle}_{\delta_{q,q'} T_{q,q}} - i \underbrace{\langle \tilde{q} | \hat{T}^\dagger | \tilde{q}' \rangle \langle \tilde{q}' | \mathbb{I} | \tilde{q} \rangle}_{\delta_{q,q'} T_{q,q}^\dagger} + |\langle \tilde{q}' | \hat{T} | \tilde{q} \rangle|^2$$

$$\hookrightarrow \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbf{Q}_V} \dots = \boxed{1} + i (T - T^\dagger)_{q,q} + \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbf{Q}_V} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \underbrace{|\langle \tilde{q}' | \hat{T} | \tilde{q} \rangle|^2}_{\propto \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

Pas d'évolution
(="avant")

$$= -(TT^\dagger)_{q,q} = -\sum_{\mathbf{q}' \in \mathbf{Q}_V} |\langle \tilde{q}' | \hat{T} | \tilde{q} \rangle|^2$$

Véritable diffusion

Autre modèle simple de décohérence

Après – avant :

$$\begin{aligned}\Delta\rho_S &= -\rho_S(x, x') \times \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) (\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle - 1) \\ &= -\rho_S(x, x') \times \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \sum_{q' \in Q_V} \mu(q') \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar}\right) |\langle \tilde{q}' | \hat{T} | \tilde{q} \rangle|^2\end{aligned}$$

Trois opérations résiduelles :

➤ Passage au continu : $\frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \rightarrow \int d\mathbf{q}$

↳
$$\rho_S(x, x', t) - \rho_S(x, x', 0) = -\rho_S(x, x', 0) \times \int d\mathbf{q} \mu(q) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \int d\mathbf{q}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar}\right) \left|\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle\right|^2$$

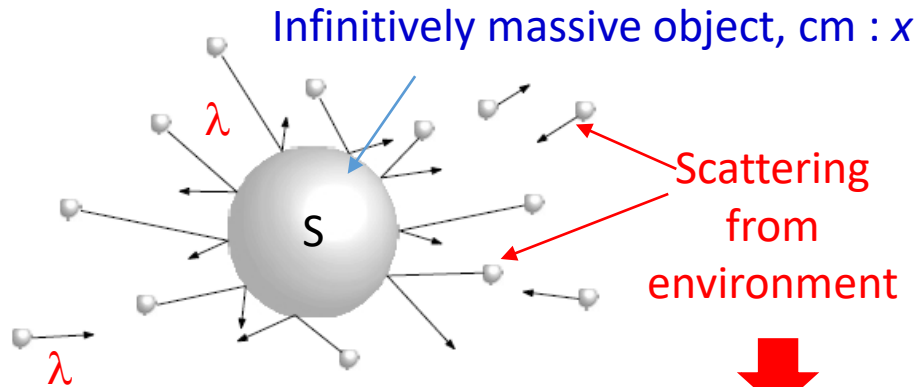
➤ expression des éléments de T : $\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle = \frac{i}{2\pi\hbar m} \delta(E - E') f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$

La $\delta^2(E-E') \rightarrow \delta(E-E') \times t$ (cf règle d'or de Fermi) $\Rightarrow$ en divisant par t , on obtient un taux d'évolution de ρ_S . La $\delta(E-E')$ transcrit le fait que **l'environnement n'emporte pas d'énergie au système... juste de la cohérence**

➤ Densité d'états : $\mu(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{4\pi} \left(\frac{N}{V}\right)^{-1} \varrho(\mathbf{q}) d\mathbf{q} d\hat{n}$ avec $\int d\mathbf{q} \rho(\mathbf{q}) =$ densité volumique₃₇

Autre modèle simple de décohérence

Quantitative model :



$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$$

Reduced density matrix $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$



Wigner density $W_S(\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2}, p)$

Fourier conjugate of $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$

$$\frac{\partial \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)}{\partial t} = -F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$$

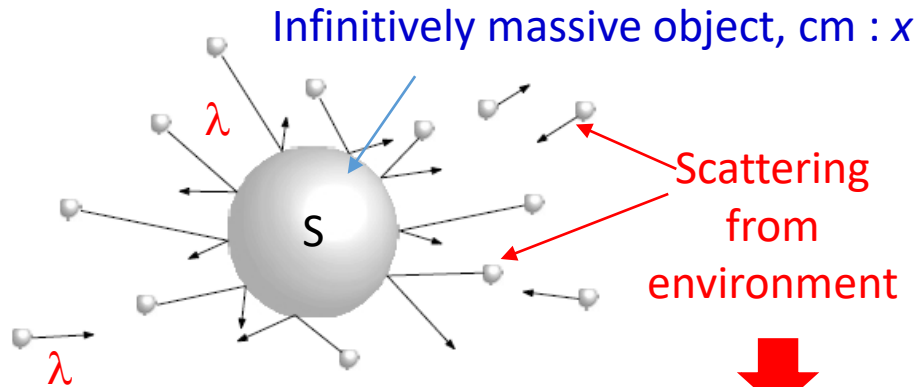
Decoherence factor:

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dq \rho(q) v(q) \int \frac{d\hat{n} d\hat{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{iq(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / \hbar} \right) \underbrace{|f(q\hat{n}, q\hat{n}')|^2}_{\frac{d\sigma}{d\Omega(\hat{n}, \hat{n}')}}^2$$

Problem : check the dimension of F

Autre modèle simple de décohérence

Quantitative model :



$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$$

Reduced density matrix $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$



Wigner density $W_S(\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2}, p)$

Fourier conjugate of $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$

$$\frac{\partial \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)}{\partial t} = -F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$$

Decoherence factor:

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dq \rho(q) v(q) \int \frac{d\hat{n} d\hat{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{iq(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / \hbar} \right) \underbrace{|f(q\hat{n}, q\hat{n}')|^2}_{\frac{d\sigma}{d\Omega(\hat{n}, \hat{n}')}}}$$

Short wave length ($\lambda \ll \Delta x$)

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \Gamma_{\text{tot}}$$

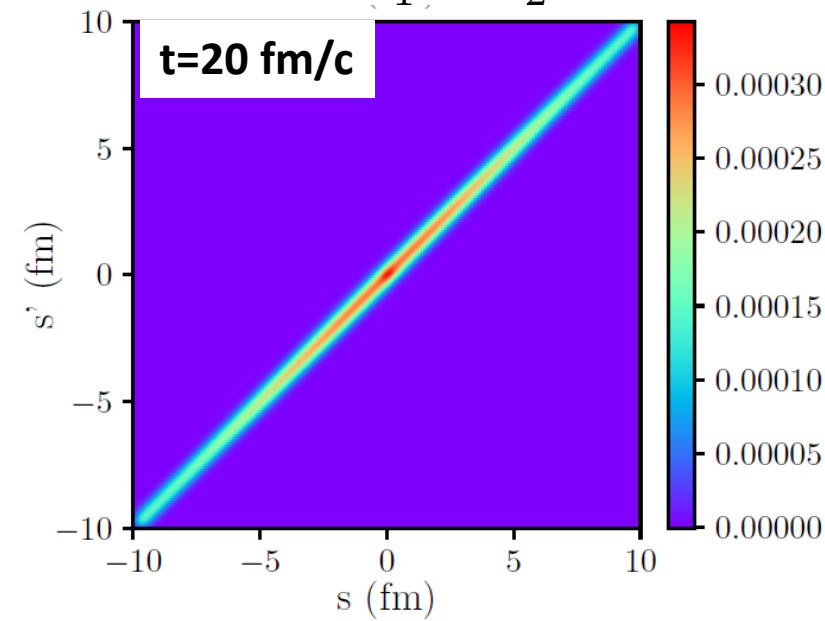
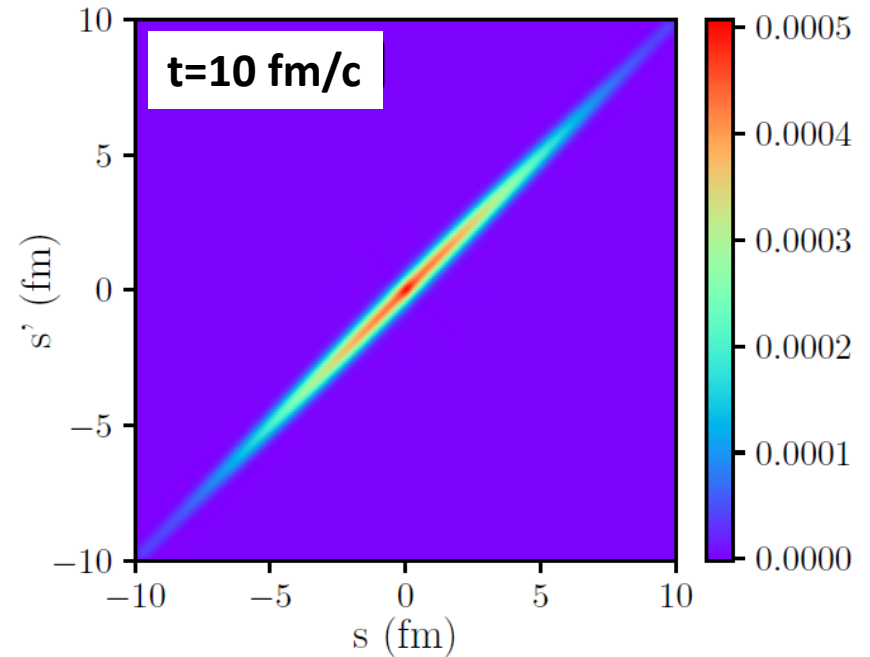
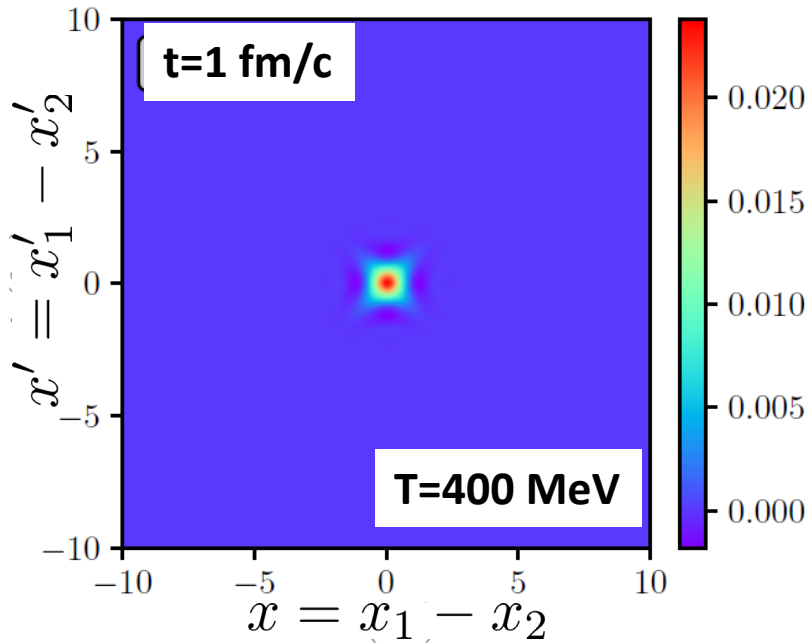
Total collision rate

Long wave length ($\lambda \gg \Delta x$)

$$F \approx \int dq \rho(q) v(q) q^2 \sigma_{\text{transp}}(q) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \approx \kappa (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2$$

Supprime la coherence à grand $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$: classicalisation

Cas d'un état lié dans un plasma quarks-gluons



$$\rho_S(x, x', t) \sim \rho_S(x, x', 0) e^{-\Lambda(x-x')^2 t}$$

- Compactification along the short diagonal
= « classicalization »

$$t_d \sim \frac{1}{\kappa(\Delta x)^2} \sim \frac{1}{TM\eta_D(\Delta x)^2}$$

Einstein relation

Single part. relaxation rate

$$t_d \sim \frac{\tau_R^{\text{single}}}{\frac{1}{\lambda_{th}^2}(\Delta x)^2} \sim \tau_R^{\text{single}} \times \left(\frac{\lambda_{th}}{\Delta x} \right)^2$$

Decoherence from syst-env. interaction

Schlosshauer

Decoherence time (s) :

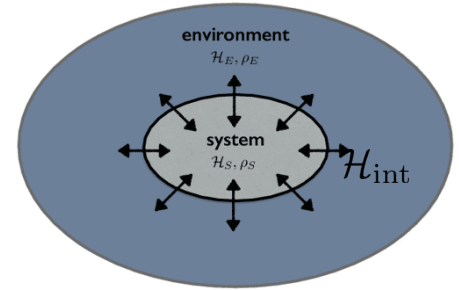
	10^{-3} cm	10^{-6} cm
Environment	Dust grain	Large molecule
Cosmic background radiation	1	10^{24}
Photons at room temperature	10^{-18}	10^6
Best laboratory vacuum	10^{-14}	10^{-2}
Air at normal pressure	10^{-31}	10^{-19}

Chat de Schroedinger ?

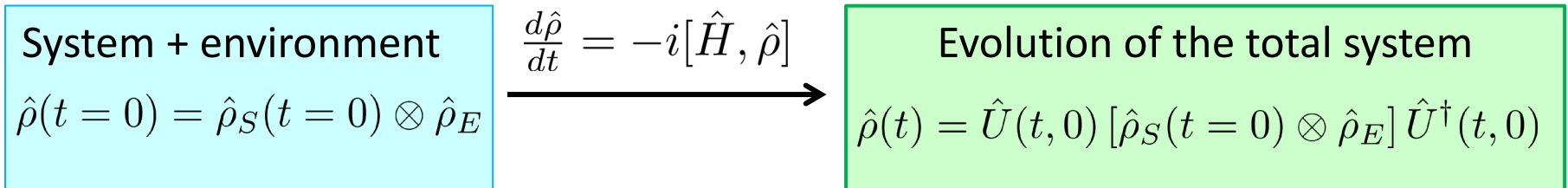
Quantum Master Equations

Quite generally, the system builds correlation with the

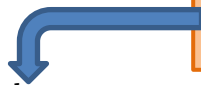
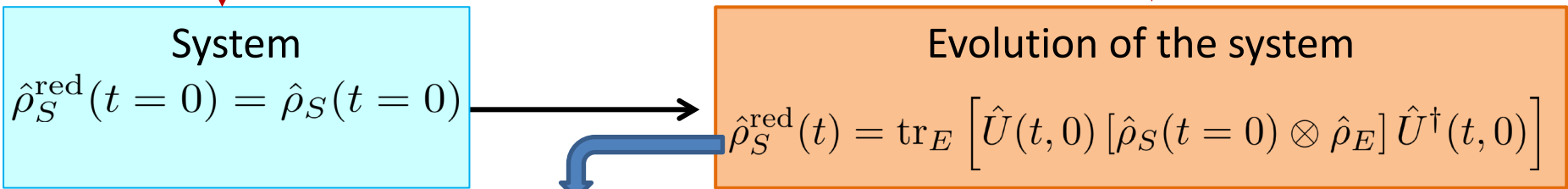
environment thanks to the Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_S^{(0)} + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$



Von Neumann equation for the total
density operator $\hat{\rho}$



Trace out environment degrees of freedom =>
Reduced density operator $\hat{\rho}_S$



Evol. eq. on the red. Density: $\frac{d\hat{\rho}_S^{\text{red}}}{dt} = \mathcal{L}[\hat{\rho}_S^{\text{red}}]$ (linear mapping)

However, $\mathcal{L}[\cdot]$ is generically a non local super-operator in time

Quantum Master Equations

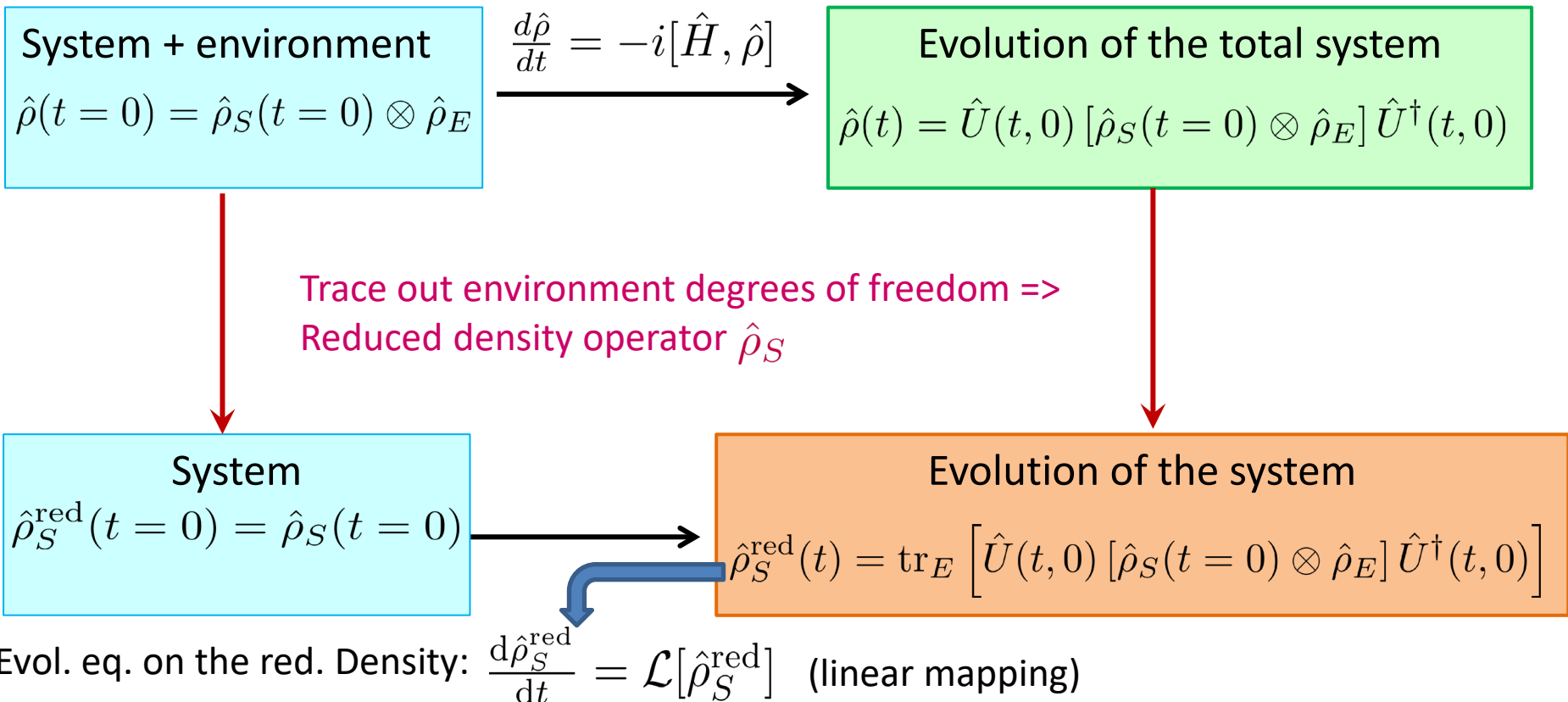
Quite generally, the system builds correlation with the

environment thanks to the Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_S^{(0)} + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$

$$\hat{\rho}_S^{\text{red}} = \sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle \langle \beta|$$

QME deal with the (coupled) evolution of probabilities ($d_{\alpha, \alpha}$) and coherences ($d_{\alpha, \beta \neq \alpha}$)

Von Neumann equation for the total
density operator $\hat{\rho}$



However, $\mathcal{L}[\cdot]$ is generically a non local super-operator in time

A special QME: The Lindblad Equation

There are many different QME... a very special one :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\text{red}}] + \sum_i \gamma_i \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} + \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \right) \right]$$

γ_i Characterize the coupling of the system with the environment

$\hat{H}_S^{(0)}$: Internal system dynamics : kinetics + potential V => unitary evolution

$\hat{L}_i$: Collapse (or Lindblad) operators, depend on the properties of the medium

See the “simple model”:

$$\frac{d\langle \hat{\rho} \rangle_{ij}}{dt} = \frac{dt}{\hbar^2} \sum_{kl} \left(\langle \hat{H}_{ik} \hat{H}_{lj} \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{H}^2 \rangle_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \langle \hat{H}^2 \rangle_{lj} \right) \langle \hat{\rho} \rangle_{kl}$$

Same structure !

A special QME: The Lindblad Equation

There are many different QME... a very special one :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\text{red}}] + \sum_i \gamma_i \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} + \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \right) \right]$$

3 important conservation properties (omit “red” superscript from now on):

- Norm conservation $\Leftrightarrow \text{tr}[\hat{\rho}_S]$ is conserved. Indeed,

$$\text{tr} \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S + \hat{\rho}_S \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \right) \right] = 0 \quad \text{(trace invariant under circular permutation)}$$
- Hermiticity: $\hat{\rho}_S^\dagger(t) = \hat{\rho}_S(t)$ if true for $t=0$.

Important to get real value of the observables :

$$\bar{O}^* = \text{tr} \left(\hat{O}^\dagger \hat{\rho}^\dagger \right) = \text{tr} \left(\hat{O} \hat{\rho} \right) \text{ iff } \hat{\rho}_S^\dagger(t) = \hat{\rho}_S(t) = \bar{O}$$

- Positivity : $\langle \varphi | \hat{\rho}_S | \varphi \rangle > 0, \forall |\varphi\rangle$

Important to get positive probability to observe the state φ , as

$$\text{prob}(\varphi) = \langle \varphi | \hat{\rho}_S | \varphi \rangle = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 \quad \text{for a pure state } \hat{\rho}_S = |\psi\rangle\langle\psi|$$

A special QME: The Lindblad Equation

There are many different QME... a very special one :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\text{red}}] + \sum_i \gamma_i \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\text{red}} + \hat{\rho}_S^{\text{red}} \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \right) \right]$$

But in general, non unitary evolution !

Unitary evolution for the total state : $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, 0) [\hat{\rho}_S(t=0) \otimes \hat{\rho}_E] \hat{U}^\dagger(t, 0)$

But in general, **no evolution operator $\mathbf{U}_S$** such that

$$\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = \text{tr}_E \left[\hat{U}(t, 0) [\hat{\rho}_S(t=0) \otimes \hat{\rho}_E] \hat{U}^\dagger(t, 0) \right]$$

can be written as $\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = \hat{U}_S(t, 0) \hat{\rho}_S(t=0) \hat{U}_S^\dagger(t, 0)$

In general, linear mapping = rotations + **contraction/dilatation** $\Leftrightarrow$ Relaxation !!!

How can we in practice find whether some evolution is unitary ? Scrutinize the evolution of the various moments $\text{tr}(\hat{\rho}_S^n)$ which should be constant if unitary evolution.

Pictorial summary

τ_E : environment autocorrelation time τ_S : system intrinsic time scale τ_R : system relaxation time
 $\tau_E \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$ $\tau_R \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$

Subsystem + environment: von Neumann equation

Trace out environment

Subsystem: non-unitary, time-irreversible evolution

Weak system-environment coupling

+ Markovian limit $\tau_E \ll \tau_R$

Redfield equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_I(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{m,n} \int_0^\infty d\tau \left(C_{mn}(\tau) [S_{m,I}(t), S_{n,I}(t-\tau) \rho_I(t)] - C_{mn}^*(\tau) [S_{m,I}(t), \rho_I(t) S_{n,I}(t-\tau)] \right)$$

Similar structure to the Linblad equation but with time delay effects

Environment self-correlation function

Pictorial summary

Inspired from Yao Int. J. of Mod. Phys. A,
Vol. 36, No. 20, 2130010 (2021)

τ_E : environment autocorrelation time τ_S : system intrinsic time scale τ_R : system relaxation time
 $\tau_E \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$ $\tau_R \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$

Subsystem + environment: von Neumann equation

Trace out environment

Subsystem: non-unitary, time-irreversible evolution

Weak syst-environment coupling

+ Markovian limit $\tau_E \ll \tau_R$

Redfield equation

$\tau_S \ll \tau_R$

$\tau_E \ll \tau_S$

Quantum Optical Regime

Quantum Brownian Motion

Linblad equation

Not the
same basis !

Linblad equation

Eigenstates of the subsystem Hamiltonian

Phase space densities

$\approx$ Low temperature (T) or density (n)

$\approx$ high temperature (T) or density (n)

Smallest time
scales wins it all !

Pictorial summary

τ_E : environment autocorrelation time τ_S : system intrinsic time scale τ_R : system relaxation time
 $\tau_E \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$ $\tau_R \searrow$ with $(n_E, T_E) \nearrow$

Subsystem + environment: von Neumann equation

Trace out environment

Subsystem: non-unitary, time-irreversible evolution

Weak system-environment coupling

+ Markovian limit $\tau_E \ll \tau_R$

Smallest time
scales wins it all !

$\tau_S \ll \tau_R$

Quantum Optical Regime

$\tau_E \ll \tau_S$

Quantum Brownian Motion

Linblad equation

Not the
same basis !

Linblad equation

Eigenstates of the subsystem Hamiltonian

Phase space densities : $(x, x') \Leftrightarrow (x, p)$

Wigner transform and/or gradient expansion

$\Leftrightarrow$ Rate
equations

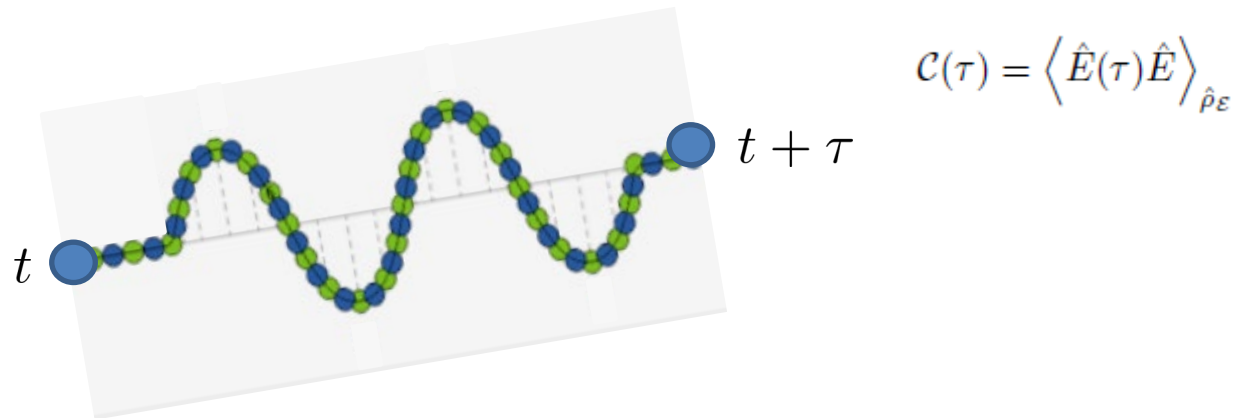
Boltzmann equation

Semi-classical
approximation :
density matrix
 $\approx$ diagonal

Fokker-Planck equation

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- Canonical $\equiv$ generic of many situations of the same kind
- Important aspects : # of states to be considered for the system, for the environment, coupling between these 2 systems... and hence temperature.
- For “high” temperature, the appropriate canonical model is to consider Harmonic oscillators for both the system and the environment,... leading to huge simplifications
The unitary evolution operator is indeed known in the case of an harmonic potential
- Linear interaction: $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{X} \otimes \hat{E}$
- Important process : delayed interaction $S \rightarrow E \rightarrow E \rightarrow S$, transmitted by the environment



- $\Rightarrow$ A key quantity from the environment : **the spectral density** : $J(\omega) \equiv \sum_i \frac{c_i^2}{2m_i\omega_i} \delta(\omega - \omega_i)$
represents all environment modes contributing to the correlation

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- The Quantum Master Equation resulting from these hypotheses:

$$\approx -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\text{red}}]$$

Frequency of the system oscillator

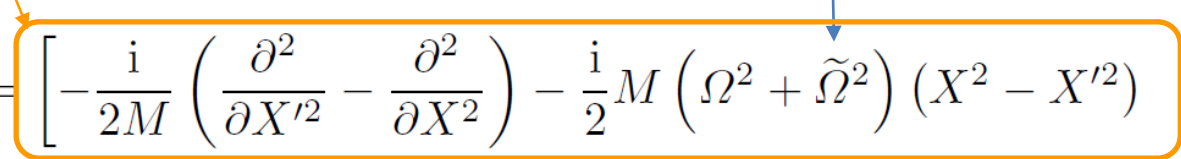
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(X, X', t) = \left[-\frac{i}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial X'^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) - \frac{i}{2} M \left(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \right) (X^2 - X'^2) \right. \\ \left. + \gamma(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} - \frac{\partial}{\partial X} \right) - D(X - X')^2 \right. \\ \left. + i f(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \rho_S(X, X', t).$$

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- The Quantum Master Equation resulting from these hypotheses:

$$\approx -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\text{red}}]$$

Frequency shift



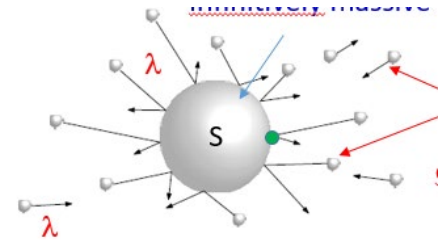
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_S(X, X', t) = & \left[-\frac{i}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial X'^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) - \frac{i}{2} M \left(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \right) (X^2 - X'^2) \right. \\ & + \gamma(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} - \frac{\partial}{\partial X} \right) - D(X - X')^2 \\ & \left. + i f(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \rho_S(X, X', t). \end{aligned}$$

- Where $\tilde{\Omega}^2 \equiv -\frac{2}{M} \int_0^\infty d\tau \eta(\tau) \cos(\Omega\tau)$ with $\eta(\tau) = \int_0^{+\infty} d\omega J(\omega) \sin(\omega\tau)$
Temperature independent
- The exact formula is not the most important... Just need to realize that it is deeply rooted in the spectral density characterizing the environment

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- The Quantum Master Equation resulting from these hypotheses:

decoherence term, remember the 2nd simple model of decoherence:



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_S(X, X', t) = & \left[-\frac{i}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial X'^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) - \frac{i}{2} M \left(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \right) (X^2 - X'^2) \right. \\ & + \gamma(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} - \frac{\partial}{\partial X} \right) \boxed{-D(X - X')^2} \\ & \left. + i f(X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \rho_S(X, X', t). \end{aligned}$$

- Where $D \equiv \int_0^\infty d\tau \nu(\tau) \cos(\Omega\tau)$ with $\nu(\tau) = \int_0^{+\infty} d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2k_B T}\right) \cos(\omega\tau)$
Temperature dependent
- This term also correspond to a steady increase of the average P^2 , as can be seen from studying
$$\frac{d\overline{P^2}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{tr} \left(\hat{\rho}_S \hat{P}^2 \right) = \left(\frac{\partial \hat{\rho}_S}{\partial t} \hat{P}^2 \right) = \dots + 2D.$$
- It can thus also be seen as a **diffusion (fluctuation) term in momentum space, hence an energy transfer from the environment -> system.**

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- The Quantum Master Equation resulting from these hypotheses:

New term ! Dissipation (energy transfer -> environment)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(X, X', t) = \left[-\frac{i}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial X'^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) - \frac{i}{2} M \left(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2 \right) (X^2 - X'^2) \right. \\ \left. + \gamma (X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} - \frac{\partial}{\partial X} \right) - D (X - X')^2 \right. \\ \left. + i f (X - X') \left(\frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \rho_S(X, X', t).$$

Anomalous
diffusion (not
discussed)

- Where $\gamma \equiv \frac{1}{M\Omega} \int_0^\infty d\tau \eta(\tau) \sin(\Omega\tau)$ with $\eta(\tau) = \int_0^{+\infty} d\omega J(\omega) \sin(\omega\tau)$
Temperature independent
- This term also correspond to an (irreversible) decrease of the average P, as can be seen from studying

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{tr} \left(\hat{\rho}_S \hat{P} \right) = \left(\frac{\partial \hat{\rho}_S}{\partial t} \hat{P} \right) = \dots = -2\gamma \bar{P}$$

A canonical model of the Quantum Brownian Motion

- Pictorial summary

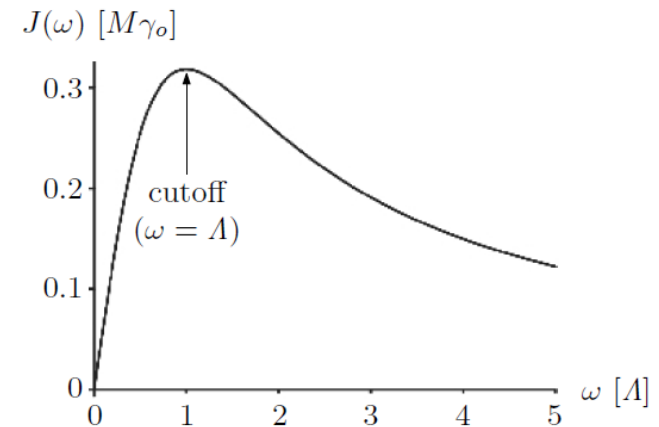


- A usual model for the spectral density : Lorentz-Drude

effective coupling strength between the system and the environment

$$J(\omega) = \frac{2M\gamma_0}{\pi} \omega \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \omega^2}$$

UV cut-off



- ... + high T regime => simple expressions of the coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} D \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} 2M\gamma_0 k_B T. \\ \gamma \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} \gamma_0 \\ \tilde{\Omega}^2 \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} -2\gamma_0 \Lambda \end{array} \right.$$

Einstein relation between fluctuations et dissipation
(classical Brownian motion)

=> *Caldeira–Leggett master equation*

Conclusions

- The OQS framework offers a nice way to deal with the 2 important phenomena of decoherence and equilibration at the quantum level
- On the conceptual level, it offers a pragmatic solution to some old problems of quantum mechanics : As the cat has to breathe, it needs to be placed in the environment, what will induce the decoherence -> statistical average instead of a quantum one.
- Besides, the “classicalization” is inherent to the OQS... and in fact an emerging phenomena from the quantum principles themselves, NOT an external ingredient
- Of course, it is also the natural way to deal with the question of decoherence in the numerous technological applications.