Problèmes

Exercice 1:

Estimer un des temps de décohérence présenté dans la table extraite de Schlosshauer (en secondes):

Environment	Dust grain 10^{-3} cm	Large molecule 10^{-6} cm
Cosmic background radiation	1	10^{24}
Photons at room temperature	10^{-18}	10^{6}
Best laboratory vacuum	10^{-14}	10^{-2}
Air at normal pressure	10^{-31}	10^{-19}

$\approx 10^6\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$

Exercice 1:

Estimer un des temps de décohérence présenté dans la table extraite de Schlosshauer (en secondes):

Environment	Dust grain 10^{-3} cm	Large molecule 10^{-6} cm
Cosmic background radiation	1	10^{24}
Photons at room temperature	10^{-18}	10^{6}
Best laboratory vacuum ($\approx 10^6\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$)	10^{-14}	10^{-2}
Air at normal pressure	10^{-31}	10^{-19}

Short wave length (λ << Δx)

$F(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \Gamma_{\mathrm{tot}}$

Total collision rate

Long wave length (λ >> Δx)

$F \approx \int dq\rho(q)v(q)q^2\sigma_{\mathrm{transp}}(q) \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2 \approx \kappa(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2$

Supprime la coherence à grand x-x' : classicalisation

39

Estimation de λ_E (molécules O_2): $\lambda_E = \frac{\hbar}{\sqrt{2Mk_BT}} \approx 7\,\mathrm{pm}$

Estimation de Δx : typiquement de la taille de l'objet (estimation sup du temps de décohérence)

Exercice 1:

On va estimer un minima pour ce temps de décohérence en se plaçant dans la limite de la "short wave length" :

$$F(x-x') = \Gamma_{\mathrm{tot}} \approx n_{0_2} \times v_{\mathrm{thermal}} \times \sigma_{\mathrm{tot}}$$

$$\approx 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3} \qquad = \sqrt{\frac{3k_BT}{M_{O_2}}} \approx 500\,\mathrm{m/s}$$

Pour la section efficace totale, on s'appuie sur la loi géométrique : $\sigma_{\mathrm{tot}} \approx \frac{\pi d^2}{4} \approx 10^{-16}\,\mathrm{m}^2$

taille

$$\Rightarrow \Gamma_{\mathrm{tot}} \approx 0.05\,\mathrm{s}^{-1} \Rightarrow t_{\mathrm{decoh}} \approx 20\,\mathrm{s}$$

Exercice 2:

a) Reprendre l'expression de la matrice densité du premier modèle simple de décohérence en un temps arbitraire

b) Calculer les 2 premiers moments $\mathrm{tr}(\hat{\rho})$ et $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)$ et conclure quant au caractère unitaire de l'evolution.

c) Etudier l'entropie quantique (de Von Neumann) associée à ce système

$$S = -\,\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$$

Exercice 2:

a) Reprendre l'expression de la matrice densité du premier modèle simple de décohérence en un temps arbitraire

Solution des équations :

- ✓ Décroissance progressive des termes d'interférence : $\rho_{\uparrow\downarrow}(t) = e^{-4\eta t}\rho_{\uparrow\downarrow}(0)$
- ✓ Conservation de la norme : $\rho_{\uparrow}(t) + \rho_{\downarrow}(t) = \mathrm{cst}$
- ✓ Mélange des populations : $\rho_{\uparrow}(t) - \rho_{\downarrow}(t) = e^{-2\eta t}\left(\rho_{\uparrow}(0) - \rho_{\downarrow}(0)\right)$

$$\begin{aligned}\rho_{\uparrow}(t) &= \tfrac{1}{2}\left[(\rho_{\uparrow}(t) + \rho_{\downarrow}(t)) + (\rho_{\uparrow}(t) - \rho_{\downarrow}(t))\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(\rho_{\uparrow}(0) + \rho_{\downarrow}(0)) + (\rho_{\uparrow}(0) - \rho_{\downarrow}(0)) \times e^{-2\eta t}\right] \\ &= \tfrac{1}{2} + \Delta \times e^{-2\eta t}\end{aligned}$$

$$\rho_{\uparrow}(t) = \tfrac{1}{2} - \Delta \times e^{-2\eta t}$$

$$\langle\hat{\rho}\rangle(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Delta \times e^{-2\eta t} & \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow}(0)e^{-4\eta t} \\ \langle\hat{\rho}\rangle^{\star}_{\uparrow\downarrow}e^{-4\eta t} & \frac{1}{2} - \Delta \times e^{-2\eta t} \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

b) Calculer les 2 premiers moments $\mathrm{tr}(\hat{\rho})$ et $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)$ et conclure quant au caractère unitaire de l'evolution.

On a: $\mathrm{tr}(\hat{\rho}(t)) = 1$ (conservation de la norme)

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2(t)) = \frac{1}{2} + 2\left(\Delta^2 e^{-4\eta t} + |\langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow}(0)|^2 e^{-8\eta t}\right)$$

On observe une décroissance constante du 2e moment => évolution non unitaire

Exercice 2:

c) Etudier l'entropie quantique (de Von Neumann) associée à ce système

$$S = -\operatorname{tr}(\rho \ln \rho)$$

En physique classique, l'entropie représente le désordre / le manqué d'information sur le système; un système à entropie nulle représente un système parfaitement ordonné (ou connu)

Dans le cas où le système quantique correspond à un état pur, un bon choix de la base nous permet d'écrire

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du log d'une matrice n'est pas trivial. Cela peut être défini comme une série de Taylor, mais aussi plus simplement si la matrice est diagonale, auquel cas :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \ln\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \ln p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln p_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln p_3 \end{pmatrix}$$

Et on a donc $S = -\sum_n p_n \ln p_n$, soit S=0 pour un état pur.

Exercice 2:

c) Etudier l'entropie quantique (de Von Neumann) associée à ce système

$$S = -\,\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$$

De manière plus générale, il faut diagonaliser la matrice densité (toujours possible car hermitique) et appliquer $S = -\sum_n p_n \ln p_n$

Pour une matrice $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^\star & b \end{pmatrix}$ avec *a*+*b*=1, les probabilités p_1 et p_2 correspondent aux valeurs propres, soit

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(a-b)^2 + 4|c|^2}\right) \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{(a-b)^2 + 4|c|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\Delta^2 + 4|\langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow}|^2}\right) \qquad = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\Delta^2 + 4|\langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow}|^2}\right)$$

Et il convient d'évaluer

$$S(t) = -\frac{1+\delta(t)}{2}\ln\frac{1+\delta(t)}{2} - \frac{1-\delta(t)}{2}\ln\frac{1-\delta(t)}{2}$$

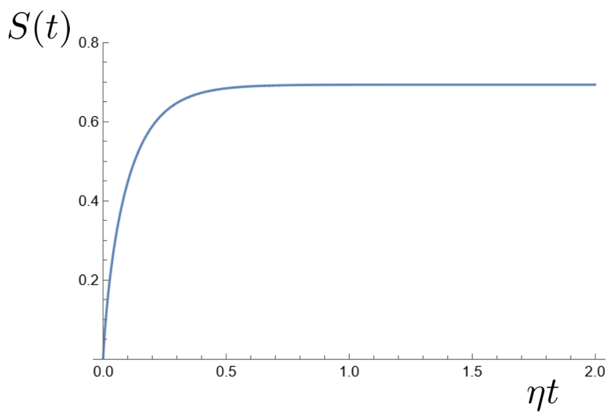
Pour un $\delta(t)$ décroissant.

Exercice 2:

c) Etudier l'entropie quantique (de Von Neumann) associée à ce système

$$S = -\,\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$$

Cas d'une matrice initiale $\langle\hat{\rho}\rangle(t=0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



On comprend donc que la « relaxation » de la matrice densité est reliée à la croissance irréversible de l'entropie.

Exercice 3:

a) Mise en route: Prouvez que l'équation de Linblad conserve le caractère hermitique de l'opérateur densité (réduite)

b) Mise en route: Prouvez que l'équation de Linblad conserve le caractère positif de l'opérateur densité (réduite)

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. A) Etudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; b) **BONUS** : poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

N.B.: On admettra pour cet exercice que les opérateurs L n'induisent pas de transition des états vers eux-mêmes, i.e.:

$$(L_i)_{nn} = 0, \quad \forall n.$$

Exercice 3:

a) Prouvez que l'équation de Linblad conserve le caractère hermitique de l'opérateur densité (réduite)

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t) = -i[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}] + \sum_i \gamma_i \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}} \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}} + \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}} \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i\right)\right]$$

On s'intéresse juste à la partie non unitaire (trivial pour l'autre). On a la solution implicite,

$$\hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t) = \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(0) + \sum_i \gamma_i \int_0^t dt' \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t') \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t') + \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t') \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i\right)\right]$$

Soit l'hermitique conjuguée :

$$\hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(t) = \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(0) + \sum_i \gamma_i \int_0^t dt' \left[\hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(t') \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(t') + \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(t') \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i\right)\right]$$

Et on voit que $\hat{\rho}_S^{\mathrm{red}\,\dagger}(t) = \hat{\rho}_S^{\mathrm{red}}(t)$ si c'est vrai en tous les temps antérieurs. L'évolution préserve donc bien l'hermiticité

Exercice 3:

b) Prouvez que l'équation de Linblad conserve le caractère positif de l'opérateur densité (réduite)

$$\langle\varphi|\hat{\rho}_S(t)|\varphi\rangle > 0, \forall|\varphi\rangle$$

On s'intéresse à nouveau juste à la partie non unitaire (trivial pour l'autre puisque l'evolution unitaire de ρ_S transforme n'importe quel état $|\varphi\rangle$ en un antécédant en t=0).

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = \sum_i \gamma_i \left[\hat{L}_i\hat{\rho}_S^{\text{red}}\hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}_i^\dagger\hat{L}_i\hat{\rho}_S^{\text{red}} + \hat{\rho}_S^{\text{red}}\hat{L}_i^\dagger\hat{L}_i\right)\right]$$

On va se placer dans la base (locale en temps) où ρ_S est diagonale :

$$\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(t) \end{pmatrix}$$

L'idée est de montrer que toutes les probabilités $p_n(t)$ évoluent bien de manière à rester positive. On a $p_n = \langle n|\hat{\rho}_S(t)|n\rangle$ et on va du coup projeter l'équation de Linblad.

Par souci de simplicité, on va limiter la somme sur I à 1.

Exercice 3:

b) Prouvez que l'equation de Linblad conserve le caractère positif de l'opérateur densité (réduite)

$$\langle\varphi|\hat{\rho}_S(t)|\varphi\rangle > 0, \forall|\varphi\rangle$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \langle n|\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{\text{red}}(t)|n\rangle = \gamma_1\langle n|\left[\hat{L}_1\hat{\rho}_S^{\text{red}}\hat{L}_1^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}_1^\dagger\hat{L}_1\hat{\rho}_S^{\text{red}} + \hat{\rho}_S^{\text{red}}\hat{L}_1^\dagger\hat{L}_1\right)\right]|n\rangle$$

On se sert ensuite du caractère diagonal de la matrice densité, ce qui permet de réécrire

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma_1\left(\sum_j |\langle j|\hat{L}_1^\dagger|n\rangle|^2 p_j - \langle n|\hat{L}_1^\dagger\hat{L}_1|n\rangle p_n\right)$$

$$= \gamma_1\left(\sum_j |\langle j|\hat{L}_1^\dagger|n\rangle|^2 p_j - \sum_j |\langle j|\hat{L}_1|n\rangle|^2 p_n\right)$$

On définit le taux de transition de l'état n -> j: $w_{n\to j} = |\langle j|\hat{L}_1|n\rangle|^2 = |\langle j|\hat{L}_1^\dagger|n\rangle|^2$

$$\Rightarrow \frac{dp_n}{dt} = \gamma_1\left(\underbrace{\boxed{\sum_{j\neq n} w_{j\to n}p_j}}_{\text{Terme de gain}} - \underbrace{\boxed{\sum_{j\neq n} w_{n\to j}p_n}}_{\text{Terme de perte}}\right)$$

Exercice 3:

b) Prouvez que l'equation de Linblad conserve le caractère positif de l'opérateur densité (réduite)

$$\langle\varphi|\hat{\rho}_S(t)|\varphi\rangle > 0, \forall|\varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{dp_n}{dt} = \gamma_1 \left(\boxed{\sum_{j\neq n} w_{j\rightarrow n} p_j} - \boxed{\sum_{j\neq n} w_{n\rightarrow j} p_n} \right)$$

Terme de gain (population par les autres états)

Terme de perte (de n vers les autres états)

On remarque que même en l'absence de gain, l'équation (dite maîtresse) s'écrit

$$\frac{dp_n}{dt} = -\Gamma p_n \quad \text{avec} \quad \Gamma = \gamma_1 \sum_{j\neq n} w_{n\rightarrow j} \quad .$$

En consequence, la probabilité p_n ne peut jamais devenir negative, elle ne peut que décroître exponentiellement.

Exercice 3:

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. a) étudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; **BONUS** : b) poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

On s'intéresse uniquement à l'effet de la partie non unitaire et à i=1 unité.

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \gamma\left[\hat{L}\hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}^\dagger\hat{L}\hat{\rho}_S + \hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger\hat{L}\right)\right]$$

On définit $\rho_{mn}(t) = \langle m|\hat{\rho}_S(t)|n\rangle$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{mn}(t) &= \gamma\langle m|\left[\hat{L}\hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\left(\hat{L}^\dagger\hat{L}\hat{\rho}_S + \hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger\hat{L}\right)\right]|n\rangle \\ &= \gamma\left[\hat{L}_{ml}\hat{\rho}_{lo}\hat{L}^\dagger_{on} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ml}\rho_{ln} + \hat{\rho}_{ml}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ln}\right)\right]\end{aligned}$$

On écrit la solution sous forme implicite :

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) + \int_0^t dt'\gamma\left[\hat{L}_{ml}\hat{\rho}_{lo}(t')\hat{L}^\dagger_{on} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ml}\rho_{ln}(t') + \hat{\rho}_{ml}(t')(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ln}\right)\right]$$

Exercice 3:

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. A) Etudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; **BONUS** : b) poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) + \int_0^t dt'\gamma \left[\hat{L}_{ml}\hat{\rho}_{lo}(t')\hat{L}^\dagger_{on} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ml}\rho_{ln}(t') + \hat{\rho}_{ml}(t')(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ln}\right)\right]$$

On va résoudre ces équations implicites de manière itérative :

$$\rho^{(i+1)}_{mn}(t) = \rho^{(0)}_{mn}(0) + \int_0^t dt'\gamma \left[\hat{L}_{ml}\hat{\rho}^{(i)}_{lo}(t')\hat{L}^\dagger_{on} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ml}\rho^{(i)}_{ln}(t') + \hat{\rho}^{(i)}_{ml}(t')(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{ln}\right)\right]$$

En prenant $\rho^{(0)}_{mn}(t) = \delta_{m,1}\delta_{n,1}$

A l'ordre 1, il vient alors

$$\begin{aligned}\rho^{(1)}_{mn}(t) &= \delta_{m,1}\delta_{n,1} + \int_0^t dt'\gamma \left[\hat{L}_{m1}\hat{L}^\dagger_{1n} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{m1}\delta_{n,1} + \delta_{m,1}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1n}\right)\right] \\ &= \delta_{m,1}\delta_{n,1} + \gamma t \left[\hat{L}_{m1}(\hat{L}_{n1})^\star - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{m1}\delta_{n,1} + \delta_{m,1}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1n}\right)\right]\end{aligned}$$

Exercice 3:

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. A) Etudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; **BONUS** : b) poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

$$\rho^{(1)}_{mn}(t) = \delta_{m,1}\delta_{n,1} + \gamma t \left[\hat{L}_{m1}(\hat{L}_{n1})^\star - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{m1}\delta_{n,1} + \delta_{m,1}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1n}\right)\right]$$

On va decliner les divers cas:

- m=n=1

$$p^{(1)}_1(t) = \rho^{(1)}_{11}(t) = 1 + \gamma t\left[|\hat{L}_{11}|^2 - (\hat{L}^\dagger\hat{L})_{11}\right] = 1 - \underbrace{\gamma\sum_{j\neq 1}|\hat{L}_{j1}|^2}_{\Gamma_1}\, t$$

- m=n≠1

$$p^{(1)}_n(t) = \rho^{(1)}_{nn}(t) = \gamma t|\hat{L}_{n1}|^2$$

Conservation de la probabilité

- m=1, n≠1 ou m≠1 et n=1

$$\rho^{(1)}_{1n}(t) = \gamma t\left[\underbrace{\hat{L}_{11}}_{0}(\hat{L}_{n1})^\star - \frac{1}{2}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1n}\right] = -\frac{\gamma t}{2}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1n} \qquad \rho^{(1)}_{m1}(t) = -\frac{\gamma t}{2}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{m1}$$

- m ≠ 1, n≠1

$$\rho^{(1)}_{mn}(t) = \gamma t\hat{L}_{m1}(\hat{L}_{n1})^\star$$

Cohérences quantiques

Exercice 3:

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. A) Etudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; **BONUS** : b) poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

Bonus : A l'ordre 2, il vient (on se focalise sur le cas m=n=1)

$$\rho_{11}^{(2)}(t) = 1 + \int_0^t dt'\gamma \left[\boxed{\hat{L}_{1l}\hat{\rho}_{lo}^{(1)}(t')\hat{L}_{o1}^\dagger} - \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1l}\rho_{l1}^{(1)}(t') + \hat{\rho}_{1l}^{(1)}(t')(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{l1} \right) \right]$$

On a ici les termes l≠1 ET o≠1

$$\sum_{l\neq 1, o\neq 1} \int_0^t dt'\gamma \left[\hat{L}_{1l}\hat{\rho}_{lo}^{(1)}(t')(\hat{L}_{1o})^\star \right] \quad \text{avec} \quad \rho_{lo}^{(1)}(t') = \gamma t' \hat{L}_{l1}(\hat{L}_{o1})^\star$$

$$= \gamma^2 \sum_{l\neq 1} \hat{L}_{1l}\hat{L}_{l1} \sum_{o\neq 1} (\hat{L}_{1o}\hat{L}_{o1})^\star \int_0^t t'dt' = |(LL)_{11}|^2 \times \frac{\gamma^2 t^2}{2}$$

Termes de "rebond" : repopulation des états excités à l'ordre 1 (poids ET cohérences)

Exercice 3:

c) Soit un état initial pur |1>, état fondamental. A) Etudier l'évolution des probabilités de trouver le système dans l'état fondamental et dans un état excité |2> au moyen de l'équation de Linblad en un temps dt "petit" en travaillant à l'ordre 1 en dt; **BONUS** : b) poursuivre le travail à l'ordre 2 en dt pour le calcul de la probabilité de l'état |1>.

Bonus : A l'ordre 2, il vient (on se focalise sur le cas m=n=1)

$$\rho_{11}^{(2)}(t) = 1 + \int_0^t dt'\gamma \left[\hat{L}_{1l}\hat{\rho}_{lo}^{(1)}(t')\hat{L}_{o1}^\dagger \boxed{- \frac{1}{2}\left((\hat{L}^\dagger\hat{L})_{1l}\rho_{l1}^{(1)}(t') + \hat{\rho}_{1l}^{(1)}(t')(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{l1} \right)} \right]$$

On distingue ici les termes l=1 et l≠1

- l=1: $-\gamma\left(\hat{L}^\dagger\hat{L}\right)_{11}\int_0^t dt'\rho_{11}^{(1)}(t') = -\underbrace{\gamma\left(\hat{L}^\dagger\hat{L}\right)_{11}}_{=\Gamma_1}\int_0^t dt'\,(1-\Gamma_1 t') = -\Gamma_1 t + \frac{(\Gamma_1 t)^2}{2}$

Début de la décroissance exponentielle

- l≠1 $\rho_{l1}^{(1)}(t) = -\frac{\gamma t}{2}(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{l1} \Rightarrow \sum_{l\neq 1}\frac{\gamma^2}{2}|(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{l1}|^2\int_0^t t'dt' = \sum_{l\neq 1}|(\hat{L}^\dagger\hat{L})_{l1}|^2 \times \frac{\gamma^2 t^2}{4}$

Autre terme de "rebond"

Exercice 4:

L'équation de Caldeira-Legett est une équation aux dérivées partielles pour laquelle la solution générale n'admet pas d'expression explicite. On peut toutefois étudier certaines de ses propriétés… On se concentrera ici sur la limite asymptotique (à grand temps) de cette équation, et ce en négligeant le terme de diffusion anomale.

a) Postuler une solution asymptotique de la forme $\rho(t \to \infty) \propto e^{-a(x+x')^2 - b(x-x')^2}$

l'injecter dans l'équation et en déduire des équations portant sur *a* et *b*, les résoudre.

b) Calculer les valeurs moyennes de x^2 et de p^2 pour cet état asymptotique. Conclure quant à sa nature

Exercice 4:

a) Postuler une solution asymptotique de la forme $\rho_S(t \to \infty) \propto e^{-a(x+x')^2 - b(x-x')^2}$

On commence par effectuer les calculs triviaux :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_S(X,X',t) = \left[-\frac{\mathrm{i}}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial X'^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}M\left(\Omega^2 + \widetilde{\Omega}^2\right)\left(X^2 - X'^2\right)\right.$$
$$+\gamma(X-X')\left(\frac{\partial}{\partial X'} - \frac{\partial}{\partial X}\right) - D(X-X')^2$$
$$\left.\cancel{+\mathrm{i}f(X-X')\left(\frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial}{\partial X}\right)}\right]\rho_S(X,X',t). = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8iab(x^2 - x'^2)}{M} \times \rho_S^{\mathrm{as}} \qquad\qquad \Rightarrow 4b\gamma(x-x')^2 \times \rho_S^{\mathrm{as}}$$

Il faut annuler séparément les termes en $(x-x')^2$ et en $x^2 - x'^2$

Termes en $(x-x')^2 \Rightarrow b = \frac{D}{4\gamma}$

$x^2 - x'^2 \Rightarrow a = \frac{\gamma M^2(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2)}{4D}$

Exercice 4:

a) Postuler une solution asymptotique de la forme $\rho_S(t \to \infty) \propto e^{-a(x+x')^2 - b(x-x')^2}$

$a = \frac{\gamma M^2 (\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2)}{4D}$ $b = \frac{D}{4\gamma}$

On utilize ensuite les expressions du modèle de Caldeira Legget

$$D \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} 2M\gamma_0 k_B T. \quad \gamma \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} \gamma_0 \qquad \widetilde{\Omega}^2 \xrightarrow{\Lambda \gg \Omega} -2\gamma_0 \Lambda$$

$$\begin{cases} a = \frac{M(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2)}{8k_B T} \\ b = \frac{M k_B T}{2} \end{cases}$$

À part une légère dépendance de $\tilde{\Omega}$, les coefficients a et b ne dependent pas du couplage à l'environnement γ_0.

On arrive donc plus ou moins vite à la même matrice densité asymptotique

Exercice 4:

b) Calculer les valeurs moyennes de x^2 et de p^2 pour cet état asymptotique. Conclure quant à sa nature

Normalisation : $$\underbrace{\int dx \int dx' \delta(x'-x)}_{\equiv \mathrm{tr}} \rho^{\mathrm{as}}(x,x') = 1$$

$$\Rightarrow \rho^{\mathrm{as}}(x,x') = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(x+x')^2 - b(x-x')^2}$$

$$\overline{x^2} = \mathrm{tr}(\hat{x}^2 \rho) = \int dx x^2 \int dx' \delta(x'-x) \rho^{\mathrm{as}}(x,x') = \frac{1}{8a} = \frac{k_B T}{M(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2)}$$

$$\overline{p^2} = \mathrm{tr}(\hat{p}^2 \rho) = -\hbar^2 \int dx \int dx' \delta(x'-x) \partial_{x'}^2 \rho^{\mathrm{as}}(x,x') = \frac{1}{4a} = 2b = M k_B T$$

L'énergie potentielle moyenne vaut : $\frac{M}{2}(\Omega^2 + \tilde{\Omega}^2)\overline{x^2} = \frac{k_B T}{2}$

L'énergie cinétique moyenne vaut $\frac{\overline{p^2}}{2M} = \frac{k_B T}{2}$

Ce résultat est typique de l'équipartition de l'énergie pour un système à l'équilibre. On est donc en présence d'un état quantique à l'équilibre thermique (perte de mémoire)