

Abrégé de Théorie Quantique des Champs

Pol B Gossiaux (Département SUBATECH)

26/1/2022

gossiaux@imt-atlantique.fr

Au menu :

- Les lois de conservation dans le monde quantique
- Création et annihilation de particules (2e quantification)
- Le vide et l'effet Casimir
- La TQC en action : la dynamique
- Mariage de la mécanique Q et de la relativité : L'équation fondatrice de Dirac
- L'antimatière
- La TQC en action (suite): L'annihilation $e^+ - e^- \rightarrow 2\gamma$, et la diffusion photon-photon
- Retour sur le spin et le « g-2 »

1

Motivation.

La TQC, pourquoi ? Pour quoi ?

- ✓ La mécanique quantique, c'est pas assez compliqué comme cela ?
- ✓ C'est pas nous qui décidons, mais Mère Nature...
- ✓ Depuis le début de la semaine, on vous parle de physique microscopique, de particules...
- ✓ ... qui interagissent (evolution d'un electron dans un noyau), mais qui "naissent" et "meurent" aussi

— La masse élémentaire... Eh oui?... voilà le hic...
CYRANO, se soulevant, l'œil égaré
Ce sont les cadets de Gascogne...
LE BRET.
Sa science... dans son délire!
CYRANO.
Copernic
ROXANE.
CYRANO.
Mais aussi que diable allait-il faire
Mais que diable allait-il faire en cette galère?...
Philosophe, physicien,
Rimeur, bretteur, musicien,
Et voyageur aérien,
Grand riposteur du tac au tac,
Amant aussi — pas pour son bien ! —
Ci-git Hercule-Savinien
De Cyrano de Bergerac
Qui fut tout, et qui ne fut rien.

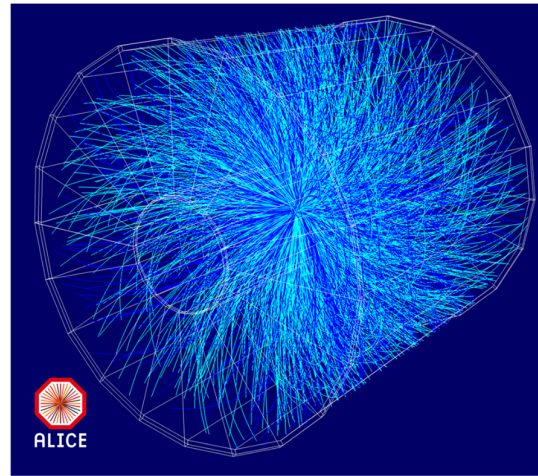
2

Motivation.

La TQC, pourquoi ? Pour quoi ?

- ✓ La mécanique quantique, c'est pas assez compliqué comme cela ?
- ✓ C'est pas nous qui décidons, mais Mère Nature...
- ✓ Depuis le début de la semaine, on vous parle de physique microscopique, de particules...
- ✓ ... qui interagissent (évolution d'un électron dans un noyau), mais qui "naissent" et "meurent" aussi
- ✓ Besoin de pouvoir décrire ces phénomènes dans le cadre d'une théorie, qui devra être compatible avec la relativité (au moins la restreinte et si possible la générale)... puisque $E=mc^2$ devrait entrer en jeu

Collision Pb-Pb au CERN... il y a bcp plus que 164 (2x82) traces chargées



Un autre exemple ?

3

Les lois de *conservation* (dans le monde quantique)

Quelques grands "conservateurs"



« ... car rien ne se crée, ni dans les opérations de l'art, ni dans celles de la nature, et l'on peut poser en principe que, dans toute opération, il y a une égale quantité de matière avant et après l'opération ; que la qualité et la quantité des principes est la même, et qu'il n'y a que des changements, des modifications. »

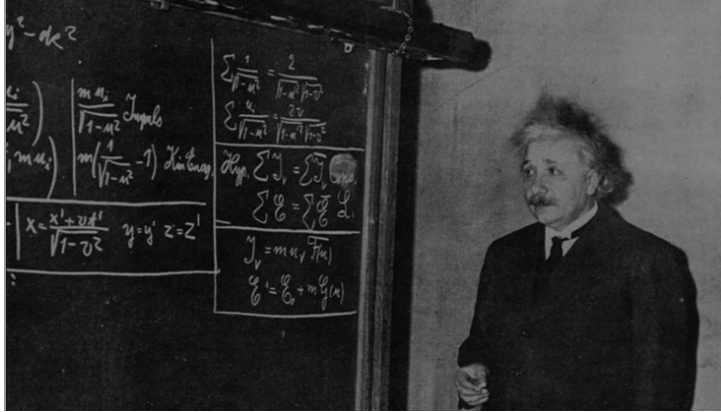
— Lavoisier, [*Traité élémentaire de chimie*](#) (1789), p. 140/141

Loi (ou principe) respectée avec une bonne précision en chimie

4

Les lois de *conservation* (dans le monde quantique)

Quelques grands “conservateurs”



$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = m(v) c^2$$

A la base, en mécanique relativiste : reformulation de l'énergie cinétique.

5

Les lois de *conservation* (dans le monde quantique)

Quelques grands “conservateurs”

[McGonagall](#)



Mise en pratique de la conservation de la masse énergie... avec bcp de magie

Et bcp d'énergie (calculez la !)

6

Les lois de *conservation* (dans le monde quantique)

Quelques lois :

- ✓ Conservation du nombre de particules (supposée correct jusqu'à il y a un siècle... c'était juste les particules qui se réagénçaient)
- ✓ Conservation de la charge électrique
- ✓ Conservation de l'énergie
- ✓ Conservation de la quantité de mouvement

N.B. : il s'agit bien de *lois* (ou de principes physiques), ce qui implique la connexion avec la réalité expérimentale) et non le résultat d'un théorème de mathématiques.

Dans le passé, d'autres principes prévalaient (Aristote: « Un corps en mouvement s'arrête quand la force qui le pousse ne peut plus agir de façon à le pousser. »)

7

Les lois de *conservation* (dans le monde quantique)

Quelques lois :

- ✓ Conservation du nombre de particules (supposée correct jusqu'à il y a un siècle... c'était juste les particules qui se réagénçaient)
- ✓ Conservation de la charge électrique
- ✓ Conservation de l'énergie
- ✓ Conservation de la quantité de mouvement

N.B. : il s'agit bien de *lois* (ou de principes physiques), ce qui implique la connexion avec la réalité expérimentale) et non le résultat d'un théorème de mathématiques... **mais la mathématisation de la nature doit être compatible avec ces lois !!!**

8

Les lois de *conservation*...

Conservation de l'énergie mécanique

Mécanique classique non relativiste

$$E_{\text{tot}}(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} + E_{\text{pot}}(\vec{x})$$

Lois du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = -\text{grad} E_{\text{pot}} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{tot}}(\vec{x}, \vec{p}) &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \text{grad} E_{\text{pot}}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \\ &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot (-\text{grad} E_{\text{pot}}(\vec{x})) + \text{grad} E_{\text{pot}}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{p}}{m} \\ &= 0 \end{aligned}$$



9

Les lois de *conservation*...

Conservation de l'énergie mécanique

Mécanique quantique non relativiste

La conservation de l'énergie totale s'écrit sur la moyenne de l'observable :

$$\frac{d\langle E_{\text{tot}} \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int dx \psi^*(x) \hat{H} \psi(x)$$

agit à droite

Interprétation physique : !!! on ne mesure pas en permanence la moyenne de l'énergie, car cela conduirait à une réduction du paquet d'ondes et donc à transfert d'énergie par l'observateur. Par contre, on peut très bien imaginer une expérience où l'état quantique est préparé avec une énergie moyenne connue, puis le laisser évoluer sur un temps Δt et mesurer ensuite l'énergie moyenne... qui sera en accord avec la loi de conservation ci-dessus.

$$\begin{aligned} \frac{d\langle E_{\text{tot}} \rangle}{dt} &= \int dx \left(\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x) \right)^* \hat{H} \psi(x) + \psi^*(x) \hat{H} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x) \right) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \int dx \psi^*(x) \left[\hat{H}^\dagger \hat{H} - \hat{H} \hat{H} \right] \psi(x) \quad \hat{H}^\dagger = \hat{H} \quad \text{Opérateur hermitique, valeurs propres réelles} \\ &= 0 \end{aligned}$$

10

Les lois de *conservation*...

Conservation pour une observable arbitraire $\hat{O}$ (par exemple quantité de mouvement)

Mécanique classique non relativiste : ssi E_{pot} est une cste

Mécanique quantique non relativiste $\frac{d\langle\hat{O}\rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int dx \psi^*(x) \hat{O} \psi(x)$

En procédant comme supra

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\hat{O}\rangle}{dt} &= \int dx \left(\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x)\right)^* \hat{O} \psi(x) + \psi^*(x) \hat{O} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x)\right) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \int dx \psi^*(x) \left[\hat{H}^\dagger \hat{O} - \hat{O} \hat{H} \right] \psi(x) \quad \hat{H}^\dagger = \hat{H} \\ &= \frac{i}{\hbar} \int dx \psi^*(x) [\hat{H}, \hat{O}] \psi(x) \end{aligned}$$

Commutateur: $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Conclusion : la quantité “O” est conservée (pour tout ψ) ssi l’opérateur caractérisant cette observable commute avec le hamiltonien ($\Rightarrow$ même base d’états)

Application: Cas de la quantité de mouvement : $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$

11

Les lois de *conservation*

Quelques Conséquences:

- ✓ Les lois de conservation peuvent donc se “lire” dans la forme de l’opérateur Hamiltonien
- ✓ On peut du coup espérer pouvoir mathématiser les autres lois de conservation (charge, nombre de particules,...)
- ✓ Conservation de la (norme) probabilité pour une particule:

$$\hat{O} \equiv \text{proba tot} = \hat{1} \quad \text{En effet,} \quad \text{proba tot} = \int dx \psi^*(x) \hat{1} \psi(x)$$



En effet, $[\hat{H}, \hat{1}] = 0$ trivialement

La conservation du nombre de particules est donc intrinsèque à l’équation d’évolution de Schroedinger (1 tout le temps)

12

Les lois de *conservation*...

Et si le potentiel depend du temps ?

Mécanique quantique non relativiste

$$\begin{aligned}\frac{d\langle E_{\text{tot}} \rangle}{dt} &= \int dx \left(\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x) \right)^* \hat{H} \psi(x) + \psi^*(x) \hat{H} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(x) \right) \right) \\ &\quad + \int dx \psi^*(x) \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \psi(x) \\ &= \dots \\ &= \int dx \psi^*(x) \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \psi(x) \neq 0\end{aligned}$$

Si le hamiltonien depend du temps, l'énergie n'est pas conservée...

Si le hamiltonien n'est pas *invariant par rapport au temps*, l'énergie n'est pas conservée...

Théorème d'E Noether : Les symétries (et *invariances*) du Lagrangien induisent les lois de conservation physiques (déjà vrai au niveau de la physique classique)

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

13

Mécanique quantique relativiste

Peut-on imaginer une equation "à la Schrödinger" compatible avec la relativité ?

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \psi$$

En l'absence d'énergie potentielle:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi$$

Contenu physique : Energie à la Einstein = Energie mécanique
 $h\nu = \hbar\omega$

En relativité : $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ (version "classique")



$$\left(i\hbar \frac{d}{dt} \right)^2 \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \nabla \right)^2 \psi + (mc^2)^2 \psi$$

$$\Leftrightarrow -\hbar^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + (\hbar c)^2 \Delta \psi = (mc^2)^2 \psi \quad \text{Équation (relativiste) de Klein-Gordon}$$

14

Mécanique quantique relativiste

Équation (relativiste) de Klein-Gordon $-\hbar^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + (\hbar c)^2 \Delta \psi = (mc^2)^2 \psi$

Solutions de type onde plane

$$\psi(\vec{x}, t) \propto \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \text{ avec } (\hbar\omega)^2 = (\hbar c k)^2 + (mc^2)^2$$

Soit $\hbar\omega = \pm \sqrt{(\hbar c k)^2 + (mc^2)^2}$ relation de dispersion

Deux solutions indépendantes, qu'on désirerait pouvoir interpreter comme des **fonctions d'onde guides d'une particule relativiste de masse m** .

Énergie associée ? $\hat{E} = i\hbar \frac{d}{dt}$

Pour ψ_+ :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\sqrt{\dots}t) = \underbrace{+\sqrt{(\hbar c k)^2 + (mc^2)^2}}_{\text{Énergie positive : ok}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\sqrt{\dots}t)$$

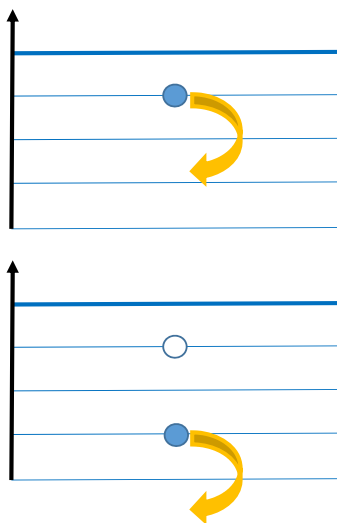
Pour ψ_- :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\sqrt{\dots}t) = \underbrace{-\sqrt{(\hbar c k)^2 + (mc^2)^2}}_{\text{Énergie négative : pas top !}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\sqrt{\dots}t)$$

15

Mécanique quantique relativiste

Niveaux d'énergie (arbitrairement) negative



Cascade sans fin avec gain d'énergie infini.

#KleinGodon "Infinite source of energy from relativistic dynamics !!! Found raising now"



Problème de la théorie, besoin d'une solution !

16

2me quantification

Les objets physiques : les champs !

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(x)$$

“quadri vecteur” espace-temps

- ✓ Les fonctions d’ondes sont des objets étendus (!!! Pas les particules !!!)
- ✓ On est familier avec les champs classiques (temperature, champ électromagnétique,...), de même que la dynamique pour ces champs.

NON ?

17

Disgression : mécanique lagrangienne

La mécanique de Newton est très peu élégante, il faut traiter tout un tas de reactions normales qui, in fine, ne presentent aucun intérêt

Il formule une mécanique *analytique* basée sur les vrais degrés de liberté d’un problème (q : coordonnées généralisées). Lagrange (dé)montre que les équations du mouvement pour une trajectoire reliant un point $q^{(1)}$ à un point $q^{(2)}$ correspondent à la *minimisation* d’une fonctionnelle dénommée l’action :



$$S(q^{(1)}, q^{(2)}) = \int_{\mathcal{C}_{q^{(1)} \rightarrow q^{(2)}}} dt L(q, \dot{q}, t)$$

Minimisation par rapport à la trajectoire supposée

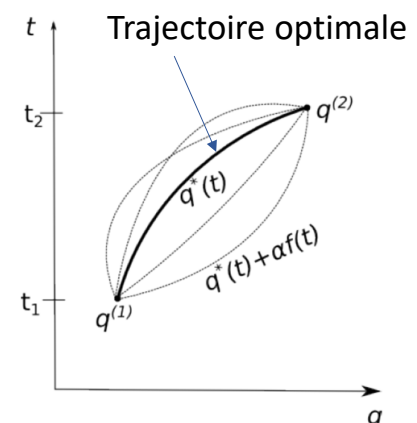
$\mathcal{C}_{q^{(1)} \rightarrow q^{(2)}}$

Lagrangien, défini comme

$$L(q, \dot{q}, t) = E_{\text{kin}}(q, \dot{q}, t) - E_{\text{pot}}(q, \dot{q}, t)$$

Exemples:

- Particule 1D: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$
- Rotateur rigide: $L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgL(1 - \cos \theta)$



18

Disgression : mécanique lagrangienne

Exemples:

- Rotateur rigide: $L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgL(1 - \cos \theta)$

Solution de la minimisation de l'action :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i = 1, N$$

Equations dites d'Euler-Lagrange

Nombre de coordonnées généralisées

Particule 1D: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

$$q \equiv x \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -V'(x) = F(x)$$

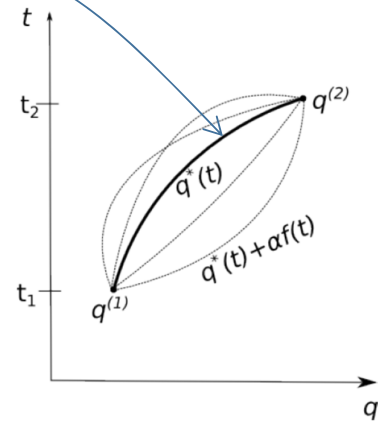
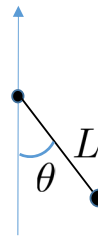
$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - F(x) = 0$$

Champ de force

$$\ddot{x} = \frac{F(x)}{m} \quad \text{2me loi de Newton}$$

N.B.: $\pi := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ est la quantité de mouvement

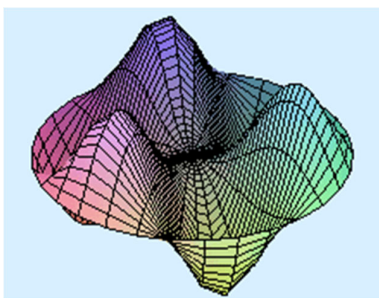
$$\Rightarrow \text{E.L.: } \frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}$$



19

Mécanique lagrangienne pour les champs

Et pour un champ ϕ ? Exemple ci-dessous pour la membrane d'un tambour



Aussi de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, mais localement

$\Rightarrow$ Densité lagrangienne (J/m^{dim}) : $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$

$\Rightarrow$ **Énergie cinétique** : $\propto \dot{\phi}^2$

$\Rightarrow$ **Energie potentielle (tension)** : $\propto c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi$

$\Rightarrow$ Energie potentielle (masse): $\propto m^2 c^4 \phi^2$

$\Rightarrow \dots$

Le lagrangien s'écrit $L = \int d^3x \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi)$

La méthode de lagrange se généralise pour les champs; les equations du mouvement d'EL s'expriment

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Accélération généralisée

Nouveau terme dû à la "tension" du champ.

20

Mécanique lagrangienne pour les champs

Electrodynamique : $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \propto \vec{E}^2 - \vec{B}^2$ (et oui, on retrouve les équations de Maxwell)

Particule sans spin : $\mathcal{L}_{KG} \propto \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$

Les equations d'EL => equation de KG !



21

2me quantification (les champs)

Postulat de la méca Q : Les valeurs propres d'un opérateur "observable" sont les résultats possibles d'un processus de mesure (la fonction d'onde se trouve projetée sur l'état propre correspondant)

Rappel d'un théorème d'algèbre : Si deux matrices (opérateurs) commutent, alors ils admettent les mêmes valeurs propres



Si (les opérateurs associés à) 2 observables commutent, **ces observables sont compatibles** (on peut mesurer avec une précision infinie l'une et l'autre)

Cf Stern-Gerlach:

Espace – quantité de mouvement : $[\hat{x}, \hat{p}] = 0 \Rightarrow \sigma_x \sigma_p = 0 !$ (pas de méca Q !)

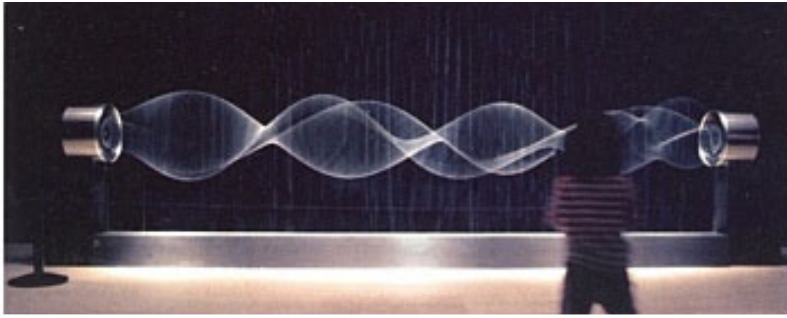
En fait on a $\sigma_x \times \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (théorème !)

Conclusion : il "suffit" d'imposer une relation de commutation non nulle entre certaines observables (bien choisies)

22

2me quantification (les champs)

Postulat de la TQC : Les champs eux-mêmes deviennent des objets quantiques



Représentation imagée d'un champ quantique 1D : plusieurs valeurs peuvent être obtenues / mesurées en un point.

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \hat{\phi}(\vec{x})$$

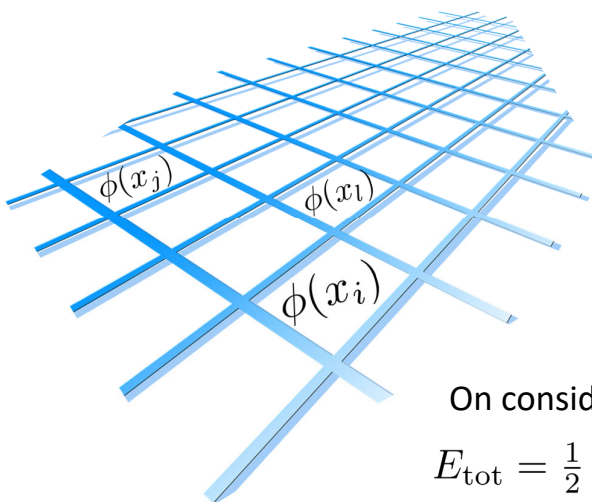
N.B. : la position x est bien ici un simple paramètre indiquant le point en lequel le champ est mesuré

Quelle autre observable pour construire un $[\hat{\phi}(\vec{x}), ???] = i\hbar ???$

23

2me quantification (les champs)

On remplace l'espace continu par un maillage :



= somme de Hamiltonien

$$\phi(\vec{x}_i) \rightarrow \phi_i$$

$$\phi(\vec{x}_j) \rightarrow \phi_j$$

⋮

On considère l'énergie totale associée au champ:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\underbrace{\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}_{\text{Energie potentielle}} + \underbrace{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2}_{\text{Energie de masse}} \right)$$

Energie cinétique

Energie potentielle

Energie de masse

On remplace les champs continus par les champs discrétisés :

$$E_{\text{tot}} \approx \frac{\Delta V}{2} \times \sum_i \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}_i^2 + \dots + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_i^2 \right) \approx \text{Somme de Hamiltoniens harmoniques !}$$

24

2me quantification (les champs)

$$E_{\text{tot}} \approx \frac{\Delta V}{2} \times \sum_i \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}_i^2 + \dots + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi_i^2 \right) \approx \text{Somme de Hamiltoniens harmoniques !}$$

Volume d'un élément

= les différents éléments

On s'inspire du coup 1) de la mécanique lagrangienne et 2) de la mécanique quantique à nombre fini de degrés de libertés :

$$\pi_i = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\Delta V}{c^2} \times \dot{\phi}_i \quad : \text{Quantité de mouvement généralisée}$$



Quantification :

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_j, \hat{\pi}_k] &= i\hbar \delta_{j,k} \\ [\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_k] &= 0 \\ [\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_k] &= 0 \end{aligned} \quad \text{où } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Contenu Φ fort: au même moment, on peut effectuer deux mesures du champ en deux endroits sans que le résultat de l'une influence le résultat de l'autre

25

2me quantification (les champs)

Retour à la limite continue :

Cas discret

$$[\hat{\phi}(x_j), \frac{1}{c} \hat{\dot{\phi}}(x_k)] = i\hbar c \frac{\delta_{j,k}}{\Delta V}$$

||
 $\hat{\pi}(x_k)$

Cas continu

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\hbar c \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

Fonction étagée à intégrale unitaire

Distribution delta de Dirac

L'opérateur d'évolution s'écrit quant à lui:

$$\hat{H} = \hat{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\hat{\pi}^2 + \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \hat{\phi}^2 \right)$$

✓ Tout ceci est un peu abstrait... peut-on donner un peu plus d'interprétation physique ?

✓ Et les particules dans tout cela ?

✓ Et au fait, comment construit-on les états (maintenant qu'on a des opérateurs) ?

26

Décomposition spectrale/modale

Cas classique: $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi_{\text{cl}}^2 + \nabla \phi_{\text{cl}} \cdot \nabla \phi_{\text{cl}} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi_{\text{cl}}^2 \right)$

Les opérateurs différentiels s'interprètent plus aisément dans l'espace de Fourier.

On pose ainsi.

$$\phi_{\text{cl}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k \tilde{\phi}_{\text{cl}}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \text{Idem pour } \pi_{\text{cl}}$$

Après transformation, on obtient ($\nabla \phi \rightarrow i\vec{k} \tilde{\phi}$)

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3k \left[\tilde{\pi}_{\text{cl}}(\vec{k}) \tilde{\pi}_{\text{cl}}^*(\vec{k}) + \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \tilde{\phi}_{\text{cl}}(\vec{k}) \tilde{\phi}_{\text{cl}}^*(\vec{k}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3k \left[\tilde{\pi}_{\text{cl}}(\vec{k}) \tilde{\pi}_{\text{cl}}^*(\vec{k}) + \left(\frac{E_{\vec{k}}}{\hbar c} \right)^2 \tilde{\phi}_{\text{cl}}(\vec{k}) \tilde{\phi}_{\text{cl}}^*(\vec{k}) \right]$$

Champ ϕ réel mais TF complexe !

où $E_{\vec{k}} = \sqrt{(\hbar \vec{k})^2 c^2 + (mc^2)^2}$ est l'énergie relativiste d'une particule $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

Il est important de remarquer que cette expression possède la forme d'une somme d'oscillateurs harmoniques ($\pi \equiv p$, $\phi \equiv x$), ce qui permet de s'appuyer sur les développements effectués dans ce cas, notamment l'introduction des opérateurs d'échelles (dans le cas quantique)

27

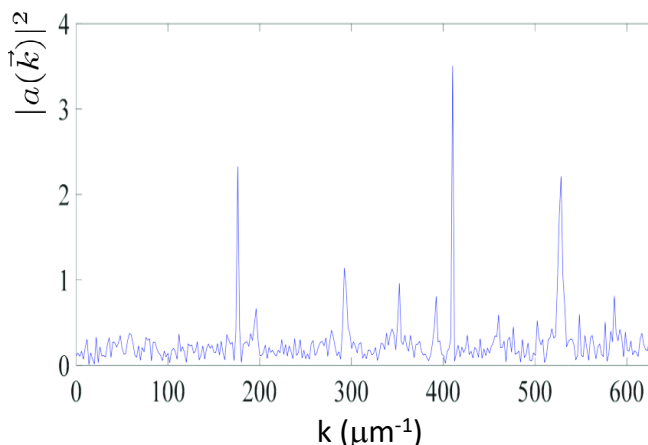
Décomposition spectrale/modale

On introduit les "coordonnées" alternatives :

$$\{\tilde{\phi}_{\text{cl}}, \tilde{\pi}_{\text{cl}}\} \rightarrow \{a(\vec{k}) := \frac{E_{\vec{k}}/\hbar c \tilde{\phi}_{\text{cl}} + i\tilde{\pi}_{\text{cl}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}, a^*(\vec{k}) := \frac{E_{\vec{k}}/\hbar c \tilde{\phi}_{\text{cl}}^* - i\tilde{\pi}_{\text{cl}}^*}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}\}$$

Avec ces nouvelles "coordonnées", on obtient (après transformation) :

$$E_{\text{tot}} = \int d^3k a(\vec{k}) a^*(\vec{k}) E_{\vec{k}} = \int d^3k |a(\vec{k})|^2 E_{\vec{k}}$$



L'énergie totale renfermée dans le champ peut donc être comprise comme la somme des énergies de tous les modes possibles (les différentes valeurs de $\vec{k}$), pondérées par $|a(\vec{k})|^2$ qui peut être vu comme une "occupation" du mode (> 0 !).

28

Décomposition spectrale/modale

Pour bénéficier au maximum de cette interprétation, il est souhaitable de réécrire les champs ϕ eux-mêmes en fonction de ces coordonnées "spectrales"

$$\phi_{cl}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\pi_{cl}(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} E_{\vec{k}} \left(a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

On procède à l'identique pour les champs quantiques :

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} E_{\vec{k}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$\hat{a}(\vec{k})$ et $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ sont des opérateurs (linéairement indépendants)

Ils sont **équivalents aux champs quantiques initiaux**.

Ces opérateurs ne peuvent commuter car cela impliquerait que les champs ϕ et π commutent

29

Décomposition spectrale/modale

Règles de commutation pour les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Monde direct

Monde de Fourier

$$\left[\begin{array}{l} [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\hbar c \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = 0 \\ [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{l})] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}) \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{l})] = 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{l})] = 0 \end{array} \right]$$

✓ $\vec{k}$ et $\vec{l}$ ont le statut de "paramètres" vis à vis de ces opérateurs; ils fixent l'endroit où ils s'appliquent dans l'espace de Fourier

✓ Règles *locales* dans l'espace de Fourier.



✓ Expression de l'opérateur "Energie totale" en fonction des $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{E}_{tot} = \int d^3 k \left(\hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) \right) \frac{E_{\vec{k}}}{2}$$

$$= \int d^3 k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) E_{\vec{k}}$$

30

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Pour toute valeur de k , les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ forment des opérateurs d'échelle par rapport à la quantité $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})$

Rappel : en effet, soit un état propre $|\varphi\rangle$ de $\hat{N}$, de valeur propre n . On définit

$$|\varphi^+\rangle := \hat{a}^\dagger(\vec{q})|\varphi\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \hat{N}|\varphi^+\rangle &= \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \underbrace{\hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{q})}_{=\hat{a}^\dagger(\vec{q})\hat{a}(\vec{k}) + \delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{k})} |\varphi\rangle \\ &= \int d^3k \underbrace{\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{q})}_{=\hat{a}^\dagger(\vec{q})\hat{a}^\dagger(\vec{k})} \hat{a}(\vec{k}) |\varphi\rangle + \hat{a}^\dagger(\vec{q}) |\varphi\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger(\vec{q}) \underbrace{\int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})}_{\hat{N}} |\varphi\rangle + |\varphi^+\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger(\vec{q}) (n |\varphi\rangle) + |\varphi^+\rangle = (n+1) |\varphi^+\rangle \end{aligned}$$

31

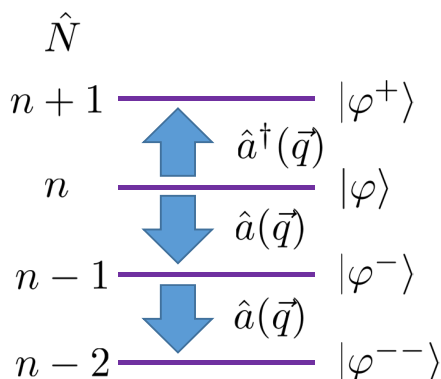
Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Pour toute valeur de k , les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ forment des opérateurs d'échelle par rapport à la quantité $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})$

Rappel : en effet, soit un état propre $|\varphi\rangle$ de $\hat{N}$, de valeur propre n . On définit

$$|\varphi^-\rangle := \hat{a}(\vec{q})|\varphi\rangle$$

$$\text{On a alors } \hat{N}|\varphi^-\rangle = \dots = (n-1) |\varphi^-\rangle$$

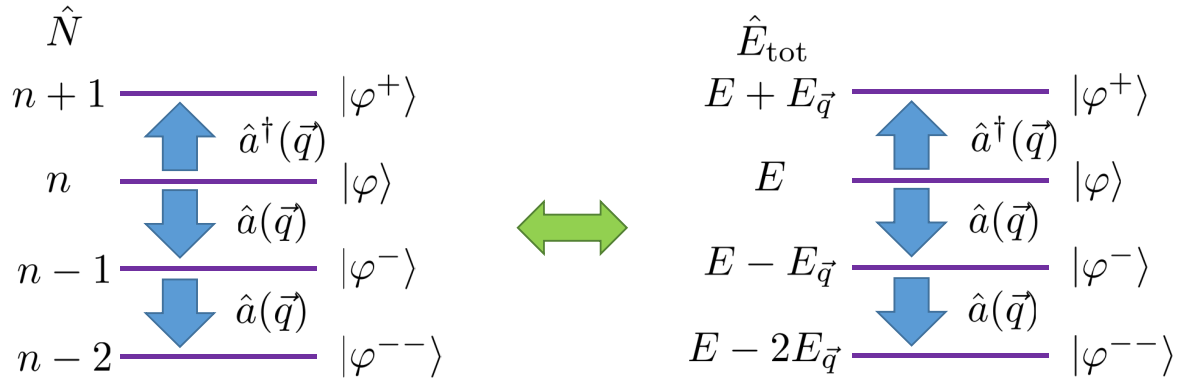


Les opérateurs d'échelle permettent donc de balayer les niveaux de $\hat{N}$ (i.e. le spectre, qui est discret)

32

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

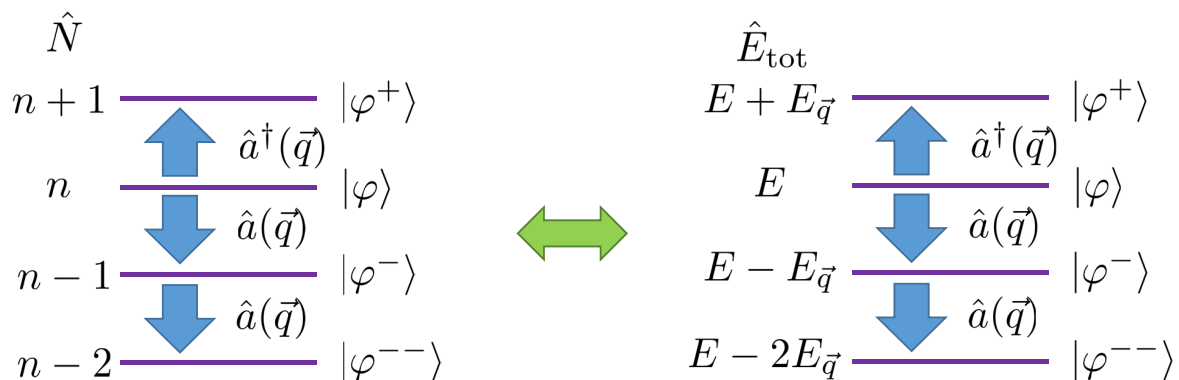
Par ailleurs, à toute modification de la “valeur” de $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})$ correspond une modification de la valeur de $\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \dots \right) E_{\vec{k}}$ correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q} \dots$



33

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Par ailleurs, à toute modification de la “valeur” de $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})$ correspond une modification de la valeur de $\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \dots \right) E_{\vec{k}}$ correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q} \dots$

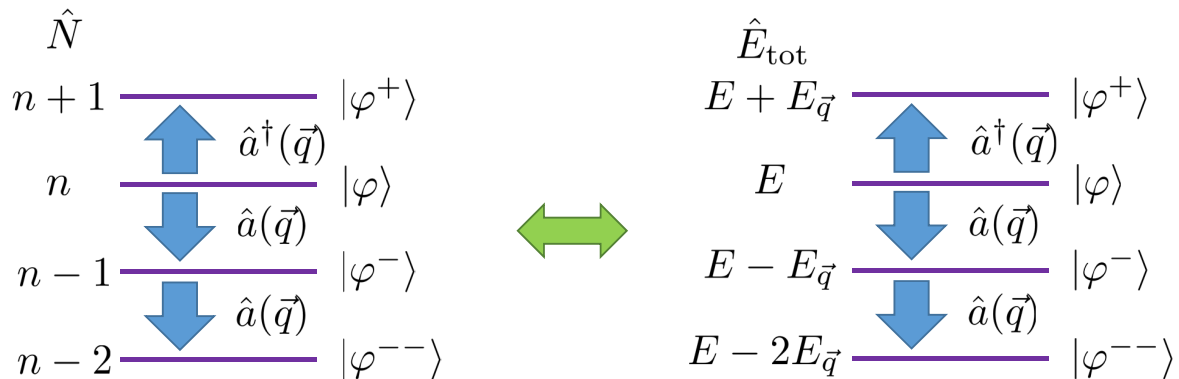


... et donc, pourquoi ne pas tout simplement affirmer “correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q}$ ” ?

34

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Par ailleurs, à toute modification de la “valeur” de $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})$ correspond une modification de la valeur de $\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \dots \right) E_{\vec{k}}$ correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q}$...

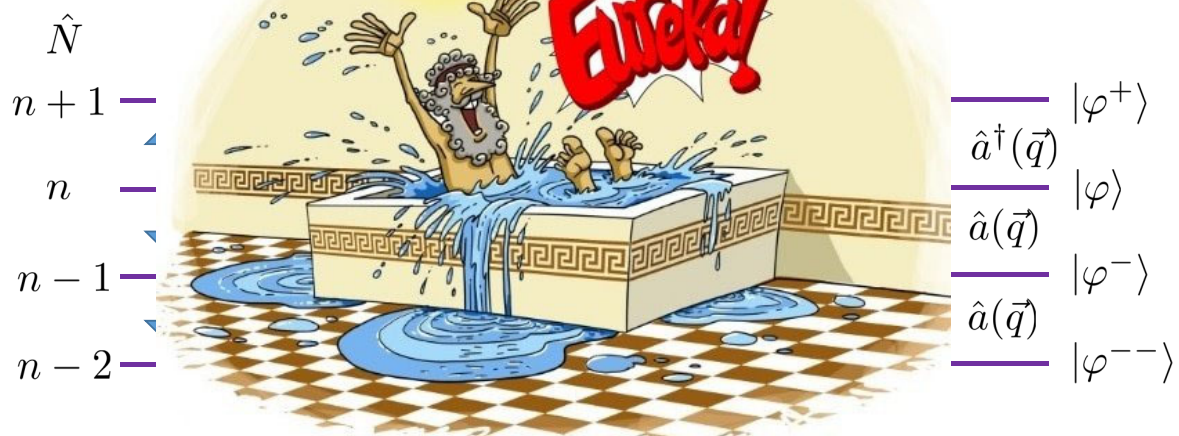


... et donc, pourquoi ne pas tout simplement affirmer “correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q}$ ” ?

35

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Par ailleurs, à toute modification de la “valeur” de $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \dots$ correspond une modification de la valeur de $\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \dots \right) E_{\vec{k}}$ correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q}$...



... et donc, pourquoi ne pas tout simplement affirmer “correspondant à l’ajout ou au retrait de l’énergie d’une particule relativiste de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{q}$ ” ?

36

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

- ✓ On comprend que $\hat{N}$ correspond à un opérateur **NOMBRE total de particules**.

$$\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})$$

- ✓ Du coup, $\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})$ est interprété comme l'(opérateur) densité de particules par fm^{-3} . L'équivalent de la "pondération" en classique
- ✓ Ce même opérateur intervient dans $\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{\delta(0)}{2} \right) E_{\vec{k}}$ d'où l'interprétation.
- ✓ Les opérateurs $\hat{a}^\dagger(\vec{q})$ et $\hat{a}(\vec{q})$ correspondent respectivement à des opérateurs de création et de destruction de particules relativistes...
- ✓ ... par conséquent, les champs $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$ agissent sur les états (ces champs étant linéaires en les opérateurs ils impliquent systématiquement $\Delta n = \pm 1$)
- ✓ **Grande victoire** : on a construit une théorie permettant de décrire mathématiquement la création et la destruction de particules.
- ✓ A noter toutefois que $[\hat{H}, \hat{N}] = [\hat{E}_{\text{tot}}, \hat{N}] = 0$. Le nombre de particules est donc conservé dans la physique correspondant au Lagrangien de Klein-Gordon (simple propagation des particules).

37

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

Mais il y a mieux !

Théorème : $\hat{N} := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k})$ est un opérateur défini semi-positif

En effet, pour tout état $|\varphi\rangle$, on a $\langle \varphi | \hat{N} | \varphi \rangle = \int d^3k \langle \varphi | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) | \varphi \rangle$

Définissons $|\Phi(\vec{k})\rangle := \hat{a}(\vec{k}) |\varphi\rangle$. On a d'une part $\langle \Phi(\vec{k}) | \Phi(\vec{k}) \rangle = \langle \varphi | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) | \varphi \rangle$

et de l'autre, puisque $|\Phi(\vec{k})\rangle$ est un état quantique normé à part entière :

$$\langle \Phi(\vec{k}) | \Phi(\vec{k}) \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi | \hat{N} | \varphi \rangle = \int d^3k \langle \varphi | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) | \varphi \rangle \geq 0.$$



Les valeurs propres de $\hat{N}$ sont toutes ≥ 0 . Il en est de même pour $\hat{E}_{\text{tot}}$

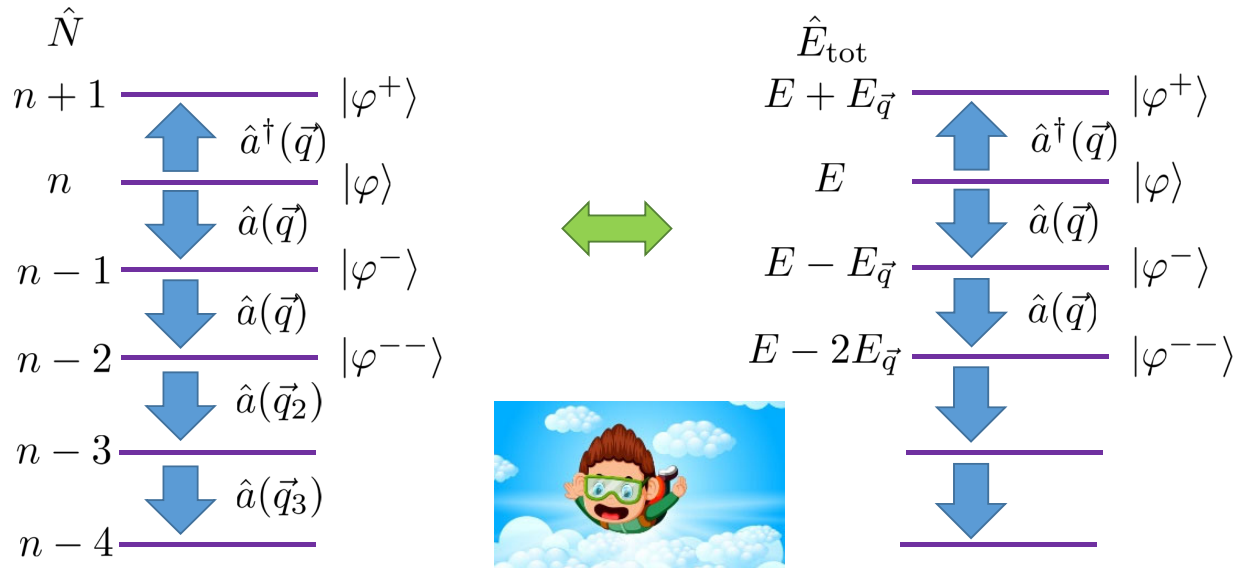


Les spectres de ces opérateurs sont "limités par le bas"; il existe une borne inférieure

38

Interprétation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

On reprend les petits schémas



Il existe un état particulier tel que l'application de tout opérateur $\hat{a}$ ne génère pas un état "inférieur".
Dénommons $|0\rangle$ un tel état



39

L'état $|0\rangle$...

Par définition, on a : $\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}$



$\hat{N}|0\rangle := \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow$ Cet état ne "renferme" aucune particule

Du point de vue énergétique

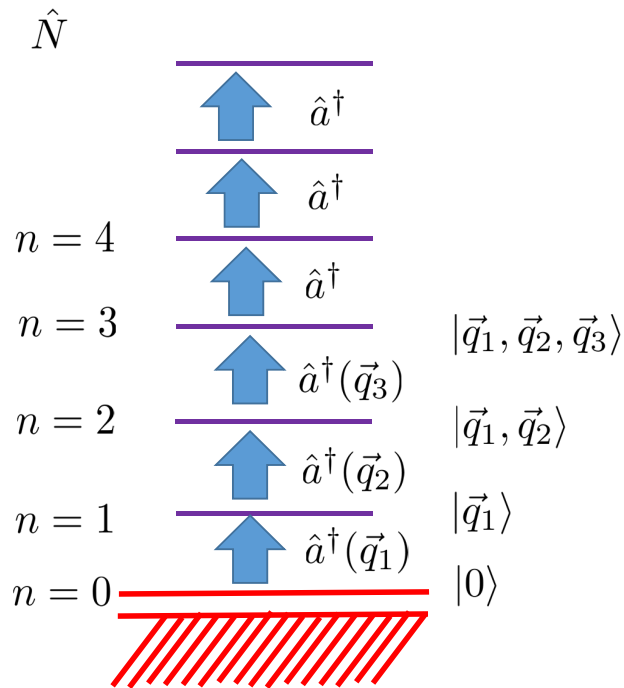
$$\hat{E}_{\text{tot}}|0\rangle = \int d^3k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) E_{\vec{k}} |0\rangle$$

La valeur de cette occupation s'annule pour tout k
 $\Rightarrow$ on obtient ainsi l'état qui possède l'énergie la plus basse de la théorie.

L'état $|0\rangle$ est donc l'état "fondamental" de la théorie correspondant à l'absence de toute particule. Il est aussi appelé le "vide".

40

... et les particules



- ✓ On obtient les états renfermant une particule de quantité de mouvement $\vec{p}_1 = \hbar\vec{q}_1$ en appliquant un opérateur de création $\hat{a}^\dagger(\vec{q}_1)$ au vide.
- ✓ En appliquant un deuxième opérateur de création, on obtient un système contenant 2 particules.
- ✓ Etc.
- ✓ On peut alors s'amuser (comme des petits fous) : on peut ainsi combiner plusieurs de ces états pour construire des états localisés, mais aussi des états intriqués combinant 0, 1 et plusieurs particules

N.B. : équivalent de la fonction d'onde en mécanique quantique usuelle :

$$\psi(\vec{x}) := \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | \vec{q}_1 \rangle$$

Interprétation: Opérateur qui détruit la particule en $\vec{x}$ tout en la "mesurant" (fallait pas te montrer !)

41

2me quantification (les champs)

Retour à la limite continue :

- ✓ Tout ceci est un peu abstrait... peut-on donner un peu plus d'interprétation physique ?
- ✓ Et les particules dans tout ça ? **Le lagrangien KG décrit des pions (particules sans spin)**
- ✓ Et au fait, comment construit-on les états ?

Et puis surtout : **Il n'y plus (./ Équation de Klein Gordon) l'infinité de solutions à énergie negative !!!**



42

Les dimensions

Unités naturelles :

➤ Energie : GeV

➤ P : GeV/c

➤ $\hbar c = \text{GeV} \cdot \text{fm}$

➤ $[\pi] = \frac{1}{c} [\dot{\phi}] = \frac{1}{\text{fm}} [\phi] = \text{GeV}^{1/2} \cdot \text{fm}^{-3/2}$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\hbar c \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad \frac{\text{GeV}}{\text{fm}^2} = \text{GeV fm} \times \frac{1}{\text{fm}^3} \quad \text{ok}$$

$$\{\tilde{\phi}_{\text{cl}}, \tilde{\pi}_{\text{cl}}\} \rightarrow \{a(\vec{k}) := \frac{E_{\vec{k}}/\hbar c \tilde{\phi}_{\text{cl}} + i\tilde{\pi}_{\text{cl}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}, a^*(\vec{k}) := \frac{E_{\vec{k}}/\hbar c \tilde{\phi}_{\text{cl}}^* - i\tilde{\pi}_{\text{cl}}^*}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}\}$$

➤ $a(\mathbf{k}) : \text{fm}^{3/2}$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right)$$

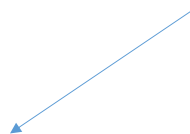


$$\text{GeV} = \text{fm} \times [\phi]^2 \Rightarrow [\phi] = (\text{GeV}/\text{fm})^{1/2}$$

43

Le Vide

Ici, une image artistique
du vide tel qu'on se le
représente



44

Le Vide

Calculons quelques observables

$$\checkmark \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = 0 \quad \hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0 | \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0}$$

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = 0$ Le champ moyen est nul ... et quid des *fluctuations*

$$\langle 0 | \hat{\phi}^2(\vec{x}) | 0 \rangle \propto \iint \frac{d^3 k d^3 q}{\sqrt{E_{\vec{k}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \left(\hat{a}^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right) | 0 \rangle$$

4 combinaisons : $\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{q}) | 0 \rangle \rightarrow 0$

On lit de droite à gauche : “Partant du vide, on supprime une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{q}$ on crée une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ ce qui permet de générer à nouveau le vide” : aucun sens !!!

45

Le Vide

Calculons quelques observables

$$\checkmark \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = 0 \quad \hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0 | \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0}$$

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = 0$ Le champ moyen est nul ... et quid des *fluctuations*

$$\langle 0 | \hat{\phi}^2(\vec{x}) | 0 \rangle \propto \iint \frac{d^3 k d^3 q}{\sqrt{E_{\vec{k}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \left(\hat{a}^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right) | 0 \rangle$$

4 combinaisons : $\langle 0 | \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}(\vec{q}) | 0 \rangle \rightarrow 0$

On lit de droite à gauche : “Partant du vide, on supprime une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{q}$ ainsi qu’une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ ce qui permet de générer à nouveau le vide” : aucun sens !!!

46

Le Vide

Calculons quelques observables

$$\checkmark \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = 0 \quad \hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle$$

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = 0$ Le champ moyen est nul ... et quid des *fluctuations*

$$\langle 0 | \hat{\phi}^2(\vec{x}) | 0 \rangle \propto \iint \frac{d^3 k d^3 q}{\sqrt{E_{\vec{k}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \left(\hat{a}^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right) | 0 \rangle$$

4 combinaisons : $\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{q}) | 0 \rangle \rightarrow 0$

On lit de droite à gauche : “Partant du vide, on crée une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{q}$ ainsi qu’une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ ce qui permet de générer à nouveau le vide” : aucun sens !!!

47

Le Vide

Calculons quelques observables

$$\checkmark \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = 0 \quad \hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle$$

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = 0$ Le champ moyen est nul ... et quid des *fluctuations*

$$\langle 0 | \hat{\phi}^2(\vec{x}) | 0 \rangle \propto \iint \frac{d^3 k d^3 q}{\sqrt{E_{\vec{k}} E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \left(\hat{a}^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \hat{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right) | 0 \rangle$$

4 combinaisons : $\langle 0 | \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{q}) | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$

On lit de droite à gauche : “Partant du vide, on crée une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{q}$ et on détruit ensuite une particule de quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ ce qui permet de générer à nouveau le vide” : possible si $\vec{k} = \vec{q}$!

... mais à ne pas interpréter comme une séquence temporelle (pas encore d’évolution !) 48

Le Vide

Calculons quelques observables

$$\checkmark \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = 0 \quad \hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = \hbar c \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2E_{\vec{k}}} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0} + \underbrace{\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | 0 \rangle}_{=0}$$

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | 0 \rangle = 0$ Le champ moyen est nul ... et quid des *fluctuations*

✓ $\langle 0 | \hat{\phi}^2(\vec{x}) | 0 \rangle \propto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{E_{\vec{k}}}$ fluctuations non nulles et même infinies du champ

Le vide n'est pas vide !

On en discute si vous voulez...

✓ Point de vue énergétique : On regarde de plus près l'énergie du vide ...

contribution des fluctuations : $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d^3 x \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right)$

49

L'énergie du vide:

$$\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3 k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) E_{\vec{k}}$$

$$\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = \int d^3 k \underbrace{\langle 0 | \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) | 0 \rangle}_{=0} E_{\vec{k}}$$

Il subsiste uniquement $\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = \int d^3 k \delta^{(3)}(0) \frac{E_{\vec{k}}}{2} > 0$

Comment interpreter $\delta^{(3)}(0)$? Provient en fait de la limite

$$\delta(k - q) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dx e^{ix(k-q)} \Rightarrow \delta(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dx$$

$$\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p d^3 x}{h^3} \frac{E_{\vec{k}}}{2}$$

✓ Divergence double (sur espace dit "des phases" : x et p)

✓ $\int \frac{d^3 p d^3 x}{h^3}$ compte en fait le nombre de cellules dans l'espace des phases

✓ Pour chaque cellule, on a l'énergie de "point 0" d'un oscillateur harmonique

50

L'énergie du vide:

Petite estimation numérique: quelle est l'énergie contenue dans 1 m³ de vide ?

$$\text{On a } \langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = V \times \int \frac{d^3 p}{h^3} \frac{E_{\vec{k}}}{2}$$

L'intégrale sur p diverge à l'infini. Il faut la régulariser en supposant une valeur maximale. Les particules les plus énergétiques issues des rayonnement cosmiques possèdent une énergie $E = pc \approx 10^{20}$ eV. On suppose donc légitimement que la TQC reste valable (au moins) jusqu'à cette échelle et on écrit :

$$\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = \frac{V}{2} \times \int_0^{E_{\text{max}}=10^{20} \text{ eV}} \frac{d^3 E}{(2\pi\hbar c)^3} E = \frac{V}{2(2\pi\hbar c)^3} \times \frac{4\pi E_{\text{max}}^4}{4}$$

On a par ailleurs que $\hbar c \approx 2 \times 10^8 \text{ eV} \cdot \text{fm}$

Une estimation numérique conduit alors à $\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle \sim 10^{70} \text{ J/m}^3$

Il s'agit d'une valeur **GIGANTISME** ... mais

paradoxalement on ne peut pas extraire d'énergie de ce vide quantique, puisqu'il s'agit de l'état d'énergie minimale.

51

L'énergie du vide:

Mythe ou réalité ?

L'énergie du vide, c'est un peu comme jouer au badminton au dessus d'un gratte-ciel ... On ne prend pas conscience de la hauteur tant qu'on ne regarde pas en bas...

... ou, en termes plus physiques : on peut adopter le point de vue que l'énergie du vide n'est pas observable en soit, qu'il s'agit juste d'une « référence » relative.

L'Effet Casimir :

52

L'énergie du vide:

Mythe ou réalité ?

L'énergie du vide, c'est un peu comme jouer au badminton au dessus d'un gratte-ciel ... On ne prend pas conscience de la hauteur tant qu'on ne regarde pas en bas...

... ou, en termes plus physiques : on peut adopter le point de vue que l'énergie du vide n'est pas observable en soit, qu'il s'agit juste d'une « référence » relative.

L'Effet Casimir :



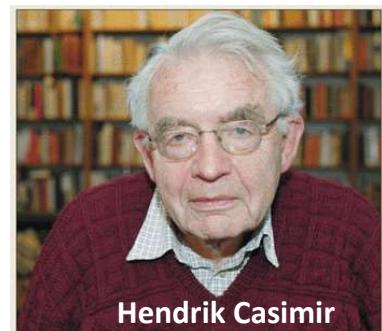
*Euh, non,
pas celui là,
l'autre !*

53

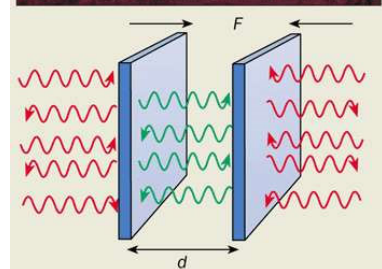
L'énergie du vide:

L'Effet Casimir :

Merci !



Hendrik Casimir

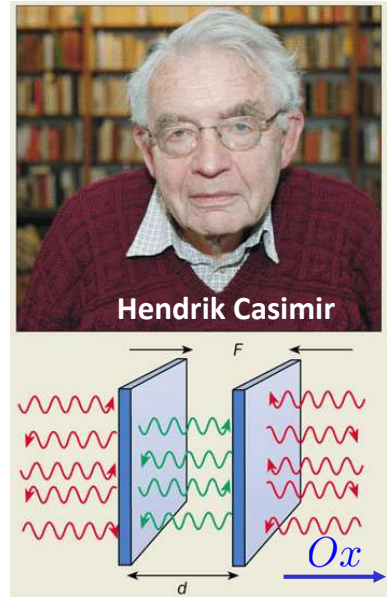


54

L'énergie du vide:

L'Effet Casimir :

- ✓ Il n'est pas possible de mesurer l'énergie absolue du vide mais on peut mesurer ses *variations* entre deux configurations géométriques.
- ✓ S'intéresse au cas du champ électromagnétique. La quantification du champ électromagnétique conduit à des particules de masse nulle, les *photons*.
- ✓ Le champ situé entre deux plaques conductrices doit s'annuler sur ces deux plaques (vrai en électromagnétisme, vrai pour les champs de photons). Situation similaire au cas de la fonction d'onde d'une particule au sein d'un puits de potentiel (quasi) infini.
- ✓ Le nombre de mode au sein du volume contenu entre les deux plaques est alors modifié : $\int dk_x \rightarrow \sum_n \frac{n\pi}{d}$. Il en résulte, à l'intérieur des deux plaques, une énergie du vide légèrement inférieure à celle qui règnerait en l'absence de ces plaques : $\langle 0 | \hat{E}_{\text{tot}} | 0 \rangle = \mathcal{E}(d) \times dS$ où $\mathcal{E}$ est la densité d'énergie.

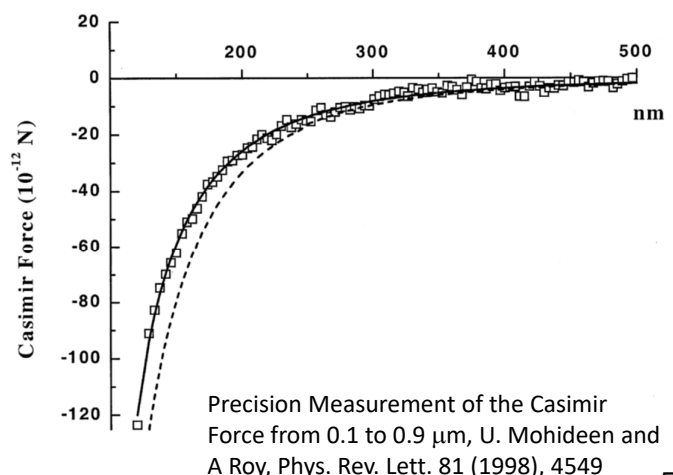
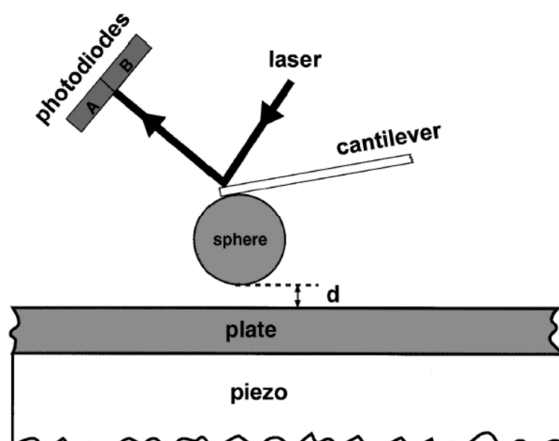


55

L'énergie du vide:

L'Effet Casimir :

- ✓ Il en résulte une force nette (extérieur-intérieur) sur chacune des plaques, $\propto S$
=> pression équivalente : $p_{\text{Cas.}} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4}$
- ✓ Application numérique pour 2 plaques de 1 mm^2 situées à $1 \mu\text{m}$ de distance:
 $F \approx -1.3 \times 10^{-12} \text{ N}$
- ✓ Effet proposé en 1948. Première expérience en 1958. Résultats expérimentaux conclusifs fin des années 90:



56

Le Vide et l'effet Casimir

En conclusion :

- ✓ Le vide n'est pas vide, et cela se voit !!! ...
- ✓ ... à condition de mettre en oeuvre des trésors d'imagination au niveau de l'instrumentation
- ✓ Pour le modèle de Klein Gordon et l'électromagnétisme, le vide reste simple à appréhender; il existe toutefois des théories pour lesquelles il possède une structure bien plus complexe.
- ✓ C'est en général un des états les plus intéressants à étudier.
- ✓ Pour les élèves intéressés : [conférence "France culture" du 12/01/2021](#)

57

La TQC en action

La dynamique de la TQC:

- ✓ Comme en mécanique quantique, l'évolution d'un état quantique suit l'équation de Schrödinger (généralisée) : $i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi\rangle = \hat{H} |\varphi\rangle$
- ✓ Solution formelle simple : $|\varphi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) |\varphi(0)\rangle$, mais l'exponentielle de l'opérateur Hamiltonien est en général inaccessible, au vu de la complexité des processus de création et d'annihilation
- ✓ Un cas simple : le Hamiltonien de Klein-Gordon :

$$\hat{E}_{\text{tot}} = \int d^3k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) E_{\vec{k}} + E_{\text{vide}}$$

Au cours du temps, les états quantiques représentant les particules acquièrent de simples phases : $|\vec{k}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iE_{\vec{k}}t}{\hbar}\right) |\vec{k}(0)\rangle$

- ✓ Pour des théories plus réalistes / complexes, on peut se faire une idée de la dynamique en effectuant un développement à petit temps (d'évolution t)

Exemple : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \right) - \boxed{V(\phi)}$

Terme d'interaction entre champs

58

La TQC en action

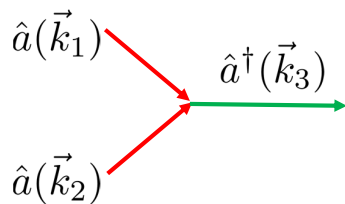
La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = |\varphi(t)\rangle - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} |\varphi(t)\rangle + \dots$
- ✓ Dans la base des particules : $\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$



- ✓ Le terme en ϕ^3 combine 3 opérateurs. Plusieurs combinaisons possibles

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}_3) \hat{a}(\vec{k}_2) \hat{a}(\vec{k}_1)$$



Détruit 2 particules et en crée 1

59

La TQC en action

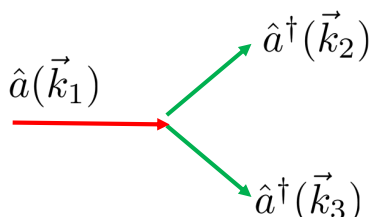
La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = |\varphi(t)\rangle - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} |\varphi(t)\rangle + \dots$
- ✓ Dans la base des particules : $\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$



- ✓ Le terme en ϕ^3 combine 3 opérateurs. Plusieurs combinaisons possibles

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}_3) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) \hat{a}(\vec{k}_1)$$



Détruit 1 particule et en crée 2

60

La TQC en action

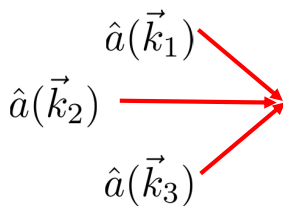
La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = |\varphi(t)\rangle - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} |\varphi(t)\rangle + \dots$
- ✓ Dans la base des particules : $\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$



- ✓ Le terme en ϕ^3 combine 3 opérateurs. Plusieurs combinaisons possibles

$$\hat{a}(\vec{k}_3) \hat{a}(\vec{k}_2) \hat{a}(\vec{k}_1)$$



Détruit 3 particules

61

La TQC en action

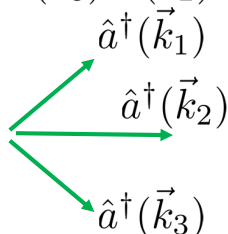
La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = |\varphi(t)\rangle - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} |\varphi(t)\rangle + \dots$
- ✓ Dans la base des particules : $\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$



- ✓ Le terme en ϕ^3 combine 3 opérateurs. Plusieurs combinaisons possibles

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}_3) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)$$



Crée 3 particules

- ✓ Dans les 3 cas, le nombre de particules n'est pas conservé

$$[\hat{H}, \hat{N}] \neq 0$$

- ✓ Ces processus peuvent exister sur de petites échelles de temps (fluctuations), mais ne peuvent émerger de manière "asymptotique" car violation de la conservation de l'énergie.

62

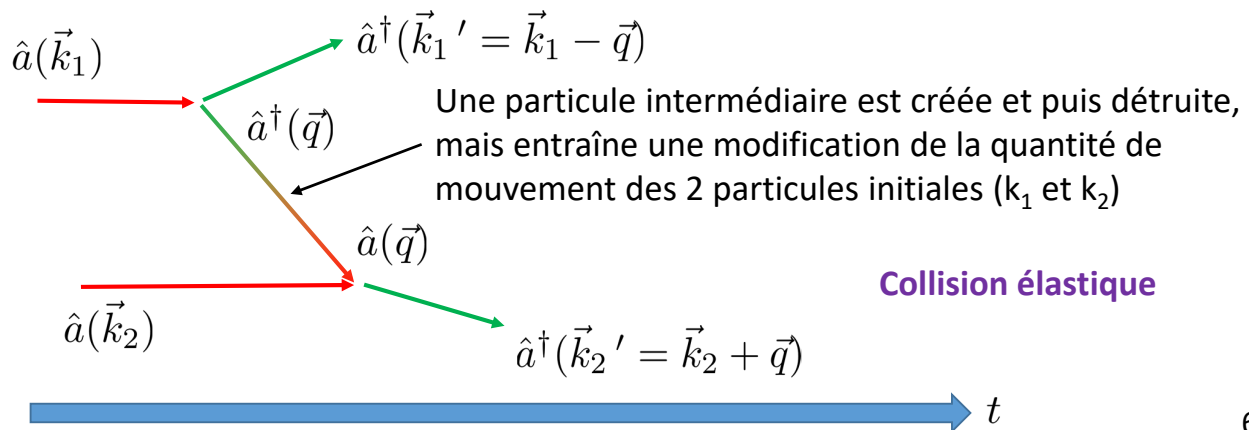
La TQC en action

La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = |\varphi(t)\rangle - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} |\varphi(t)\rangle - \frac{dt^2}{2\hbar^2} \hat{H}^2 |\varphi(t)\rangle + \dots$
- ✓ A l'ordre 2 en κ , On itère les processus décrits précédemment ...



- ✓ Certains deviennent alors possibles du point de vue énergétique:

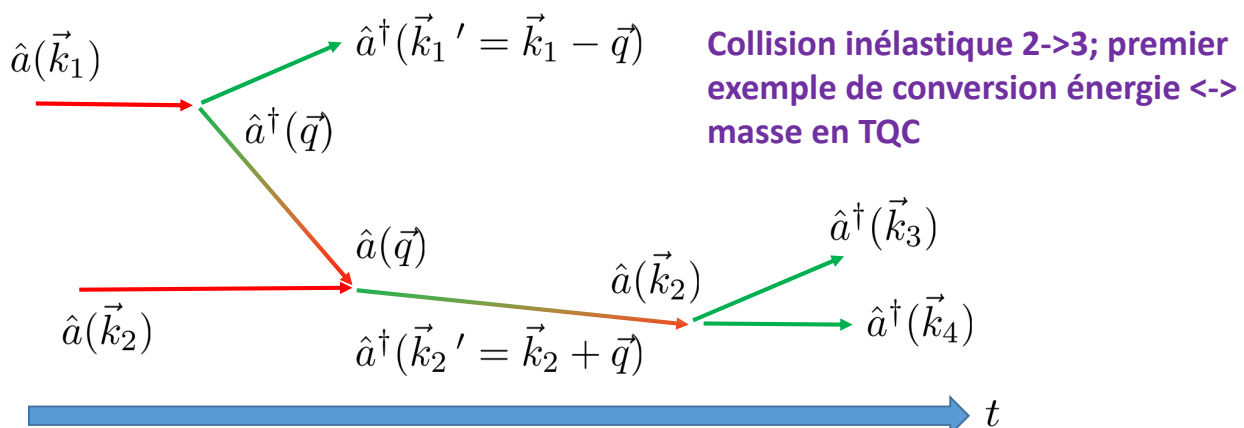


63

La TQC en action

La dynamique de la TQC:

- ✓ Exemple d'un potentiel $V(\phi) = \kappa \phi^3(\vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{KG} + \kappa \int d^3x \hat{\phi}^3(\vec{x})$
- ✓ On a $|\varphi(t + dt)\rangle = \left(\mathbb{I} - i \frac{dt}{\hbar} \hat{H} - \frac{dt^2}{2\hbar^2} \hat{H}^2 + i \frac{dt^3}{6\hbar^3} \hat{H}^3 + \dots \right) |\varphi(t)\rangle$
- ✓ A l'ordre 3 en κ , On itère les processus décrits précédemment; de nouveaux processus sont révélés :

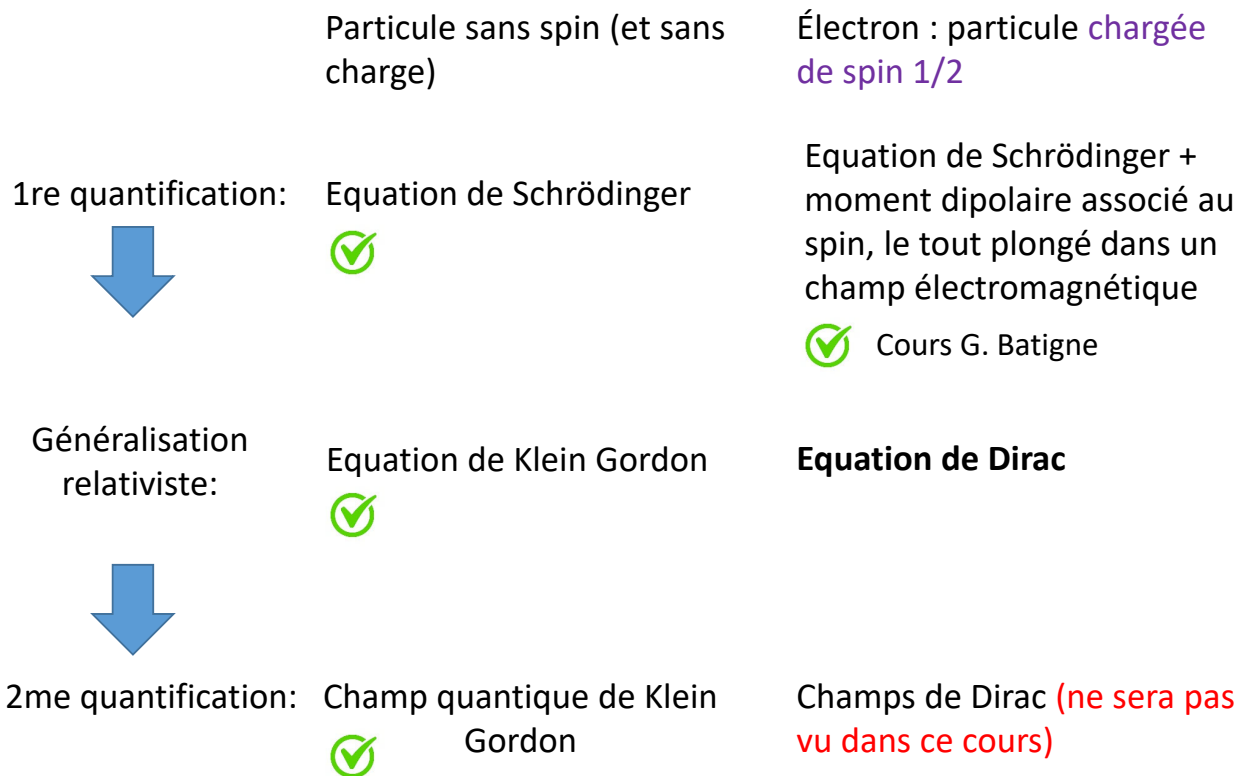


- ✓ Approche diagrammatique de la TQC pour décrire ce type de série en la « constante de couplage » κ : R. P. Feynman

64

L'équation de Dirac

Motivation



65

L'équation de Dirac

Problèmes liés à l'équation de KG

✓ $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow$ solutions à énergie negative

✓ Densité de probabilité dans equation de conservation $\frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0$:

$$\rho \propto \Im \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) : \text{pas définie positive !}$$

Conséquence directe de la dérivée seconde en temps de KG

$$E^2 = (p^2 c^2 + m^2 c^4) \times \mathbb{I}_2 \Rightarrow \hat{H}^2 = (\hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4) \times \mathbb{I}_2$$

Motivations:

Est-il possible de définir un opérateur "racine carrée" du membre de droite ?

Espace des spins (dédoublément ./ spin nul)

Est-il possible de linéariser l'équation de KG pour s'affranchir des dérivées secondes temporelles ?

66

L'équation de Dirac

Etablissement de l'équation de Dirac

- ✓ On part de $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \Rightarrow [(i\hbar\partial_t)^2 - (\frac{\hbar c}{i}\nabla)^2] \mathbb{I}_2 = m^2 c^4 \mathbb{I}_2$
- ✓ On peut factoriser le membre de gauche en se servant des propriétés des matrices de Pauli:

$$\begin{cases} \sigma_i \cdot \sigma_i = \mathbb{I}_2, & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ \sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_i = 0, & \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \text{ et } i \neq j \end{cases}$$

Ce qui entraîne :

$$(i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 - i\hbar c \sum_j \partial_j \sigma_j) \cdot (i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 + i\hbar c \sum_l \partial_l \sigma_l) = \left[(i\hbar\partial_t)^2 - \left(\frac{\hbar c}{i}\nabla\right)^2 \right] \mathbb{I}_2$$

- ✓ L'équation sur la fonction d'onde ψ_2 devient

$$(i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 + i\hbar c \sum_j \partial_j \sigma_j) \cdot (i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 - i\hbar c \sum_l \partial_l \sigma_l) \psi_2 = (mc^2)^2 \psi_2$$

- ✓ On pose $\psi^{(L)} := \psi_2$

$$\psi^{(R)} := \frac{1}{mc^2} (i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 - i\hbar c \sum_l \partial_l \sigma_l) \psi_2$$

67

L'équation de Dirac

Etablissement de l'équation de Dirac

$$(i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 + i\hbar c \sum_j \partial_j \sigma_j) \cdot (i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 - i\hbar c \sum_l \partial_l \sigma_l) \psi_2 = (mc^2)^2 \psi_2$$

$\swarrow mc^2 \psi^{(R)}$

- ✓ Ceci conduit aux équations couplées

$$(i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 + i\hbar c \sum_j \partial_j \sigma_j) \psi^{(R)} = mc^2 \psi^{(L)}$$

$$(i\hbar\partial_t \mathbb{I}_2 - i\hbar c \sum_j \partial_j \sigma_j) \psi^{(L)} = mc^2 \psi^{(R)}$$

- ✓ On définit alors le quadri vecteur $\psi := \begin{pmatrix} \psi^{(R)} \\ \psi^{(L)} \end{pmatrix}$ et les équations s'écrivent,

$$i\hbar\partial_t \psi = -i\hbar c \sum_j \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \partial_j \psi + mc^2 \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \psi$$

- ✓ Soit plus synthétiquement, en posant

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_j := \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}$$

$$i\hbar\partial_t \psi = \left(\sum_j \alpha_j \hat{p}_j c + mc^2 \gamma^0 \right) \psi = \left(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} c + mc^2 \gamma^0 \right) \psi$$

68

L'équation de Dirac

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}c + mc^2\gamma^0\right)\psi$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_j := \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}$$

- ✓ Une des formes de l'équation de Dirac
- ✓ Elle se met agréablement sous la forme

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}_{\text{Dirac}}\psi \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{\text{Dirac}} := \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}c + mc^2\gamma^0$$



- ✓ Norme positive pour tous les états (cf motivation)
- ✓ Valeurs propres de l'opérateur hamiltonien (pour des ondes planes):

$$\pm\sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2}$$

- ✓ Toujours des solutions à énergie négative !!!

69

L'équation de Dirac

- ✓ On étudie plus simplement ces solutions en posant $\psi_D = U \cdot \psi$

$$\text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ -1_2 & 1_2 \end{pmatrix}$$

Transformation unitaire

- ✓ L'équation de Dirac se transforme alors:

$$i\hbar\partial_t \underbrace{U\psi}_{\psi_D} = U \cdot \left(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}c + mc^2\gamma^0\right) U^\dagger \cdot \underbrace{U\psi}_{\psi_D}$$

- ✓ La transformation $U \cdot \hat{H} \cdot U^\dagger$ préserve la forme de ce hamiltonien, avec

$$\gamma^0 \rightarrow \gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad \alpha_j \rightarrow \alpha_{D,j} := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ Pour $p \ll mc$, on observe aisément deux types de vecteurs propres:

$$\psi_D \approx \begin{pmatrix} \psi_A \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E \approx mc^2 \quad \text{avec } \psi_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

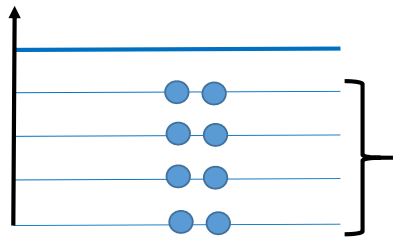
(par exemple)

$$\psi_D \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_B \end{pmatrix} \Rightarrow E \approx -mc^2$$

Deux "spineurs" (états de spin) non relativistes

70

Interprétation des solutions à énergie négative

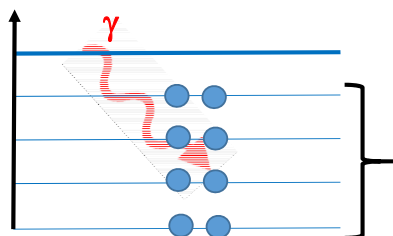


Mer de
Dirac

Selon Dirac, l'ensemble des états à énergie négative sont occupés dans l'état fondamental global (puisque'il s'agit de fermions, un état peut être occupé au plus une fois)

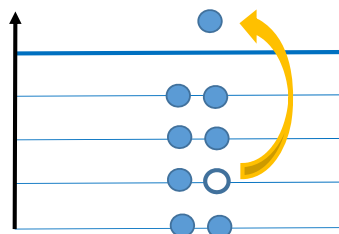
71

Interprétation des solutions à énergie négative



Mer de
Dirac

Selon Dirac, l'ensemble des états à énergie négative sont occupés dans l'état fondamental global (puisque'il s'agit de fermions, un état peut être occupé au plus une fois)



Exciter une des particules de la mer de Dirac (vers un état d'énergie positive) crée un « trou ». La mer de Dirac munie de ce trou apparaît comme une particule effective d'énergie *positive* (elle peut en effet communiquer un surcroît d'énergie à une particule occupant un état d'énergie positif)

Plus généralement, aux nombres quantiques de l'état inoccupé correspondent des nombres quantiques du trou:

$$\vec{p}_{\text{trou}} + \underbrace{\vec{p}_{\text{état}}}_{=\vec{p}} = \vec{p}_{\text{vide}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{trou}} = -\vec{p}$$

idem pour la charge : charge_{trou} = - charge_{état} => **antiparticule !**

La théorie de Dirac renferme donc la notion d'antiparticule. Une formulation propre nécessite toutefois de passer par la TQC.

72

L'équation de Dirac et la TQC

Les champs de Dirac:

$$\hat{\psi}(\vec{x}) \sim \int d^3k \left(\hat{b}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{d}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

destruction d'une charge positive (positon)
création d'une charge négative (électron)

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \sim \int d^3k \left(\hat{d}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

destruction d'une charge négative
création d'une charge positive

Dédoublage des opérateurs de création et destruction ./. KG : particule ET antiparticule

73

L'équation de Dirac et la TQC

Structuration du lagrangien:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{champ elema}} - V_{\text{interaction}} \quad \text{Formulation ?}$$

Lagrangien qui génère l'équation de Dirac (pour des fermions libres) suite à variation.
Lagrangien qui génère les équation de Maxwell (sans source) pour le champ électromagnétique, suite à variation.
Potentiel d'interaction entre champ de Dirac et potentiel électromagnétique.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Degrés de liberté: champs de Dirac ψ et ψ^*
Degrés de liberté: potentiel "de Coulomb" Φ , et potentiel vecteur $\vec{A}$
Degrés de liberté : champ de Dirac, potentiel "de Coulomb", et potentiel vecteur

...ou encore (après 2me quantification)

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{Dirac}} + \hat{H}_{\text{champ elema}} + \hat{V}_{\text{interaction}}$$

74

L'équation de Dirac et la TQC

Les termes d'interaction:

✓ En théorie classique de l'électromagnétisme :

❑ Charge – potentiel de Coulomb : $\int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x})$ (énergie électrique)

❑ Courant – potentiel vecteur : $\int d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x})$ (énergie magnétique)

✓ La densité de charge et de courant associés à l'équation de Dirac

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha} \cdot \nabla + mc^2\gamma^0\right)\psi \Rightarrow \partial_t\psi = \left(-c\vec{\alpha} \cdot \nabla - i\frac{mc^2}{\hbar}\gamma^0\right)\psi$$



$$-i\hbar\partial_t\psi^\dagger = \psi^\dagger \left(-\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha} \cdot \nabla + mc^2\gamma^0\right) \Rightarrow \partial_t\psi^\dagger = \psi^\dagger \left(-c\vec{\alpha} \cdot \nabla + i\frac{mc^2}{\hbar}\gamma^0\right)$$



$$\partial_t\left(\frac{\psi^\dagger\psi}{c}\right) = \psi^\dagger(-\vec{\alpha} \cdot \nabla\psi) + (-\vec{\nabla}\psi^\dagger \cdot \vec{\alpha})\psi = -\nabla \cdot (\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi)$$

$$\longleftrightarrow \partial_t\rho + \nabla\vec{j} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = \frac{\psi^\dagger\psi}{c} e & \longleftarrow \text{Densité de charge} \\ \vec{j} = \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} \cdot \psi e & \longleftarrow \text{Densité de courant} \end{cases}$$

✓ ... ou e est la charge élémentaire de la particule

75

L'équation de Dirac et la TQC

Les termes d'interaction:

✓ En TQC:

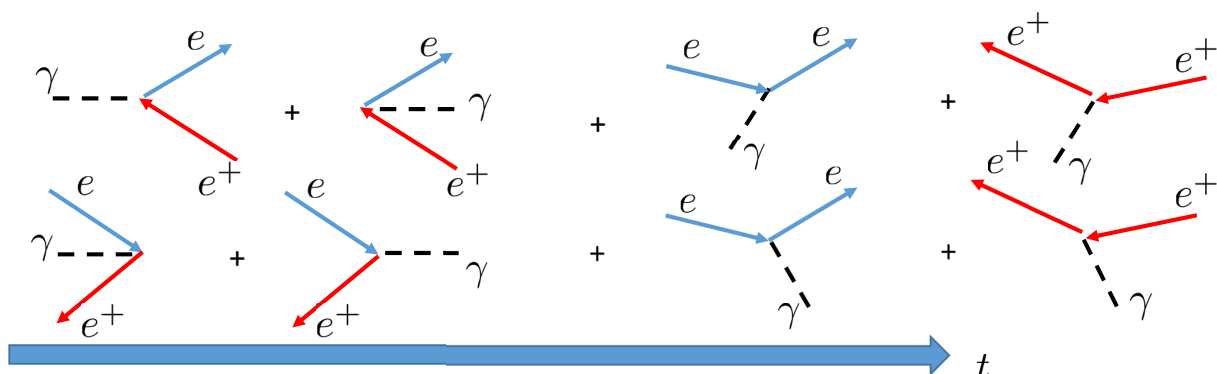
❑ Charge – potentiel de Coulomb : $e \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})\hat{\Phi}(\vec{x})$

❑ Courant – potentiel vecteur : $e \int d^3x \sum_l \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\alpha_l\hat{\psi}(\vec{x})c\hat{A}_l(\vec{x})$

✓ Il s'agit de termes contenant 3 champs (comme le potentiel d'interaction en ϕ^3), mixant des opérateurs de création et d'annihilation

✓ Le nbre de particules n'est pas conservé, mais bien la charge.

✓ Le contenu : Les 8 processus physiques découlant de cette interaction :

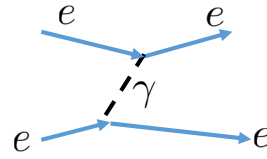


76

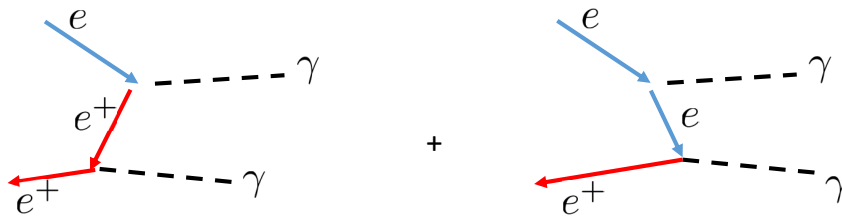
La TQC en action (suite)

Processus à l'ordre 2 (en la constant de couplage):

- ✓ Diffusion élastique $e+e \rightarrow e+e$:



- ✓ L'annihilation $e + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$



Application "Tomographie à Positron";
voir conférence J.P. Cussonneau

- ✓ Augmentation du nombre de diagrammes pour des processus de plus en plus complexes
- ✓ La TQC permet en outre de calculer la probabilité de la réaction par unité de temps (concept de "section efficace" pour les états de diffusion)

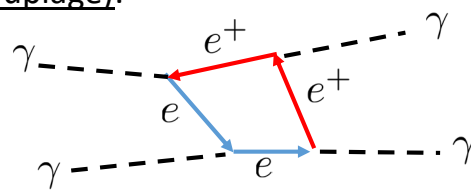
77

La TQC en action (suite)

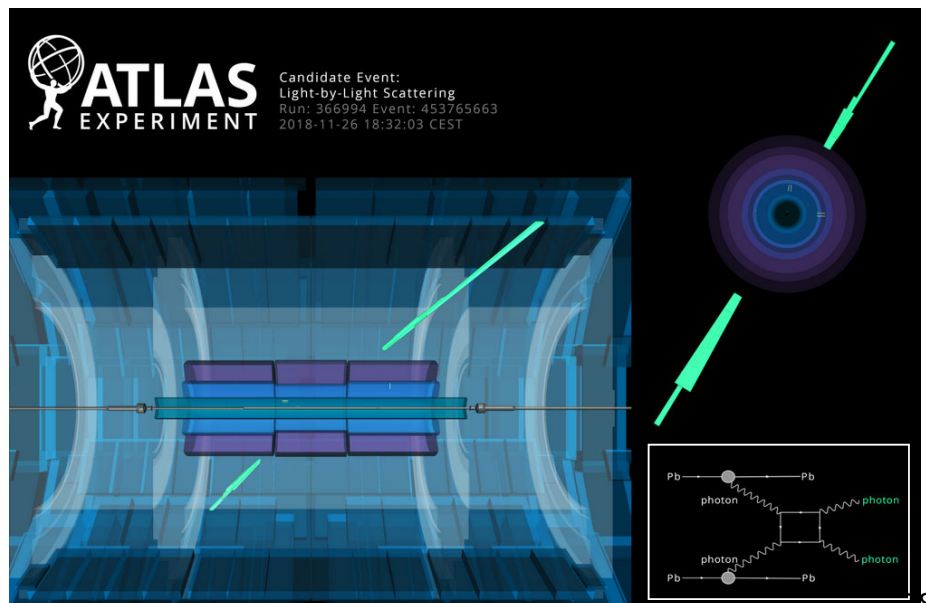
Processus à l'ordre 4 (en la constant de couplage):

- ✓ Diffusion élastique $\gamma+\gamma \rightarrow \gamma+\gamma$:

**Processus impossible
en électromagnétisme
classique...**



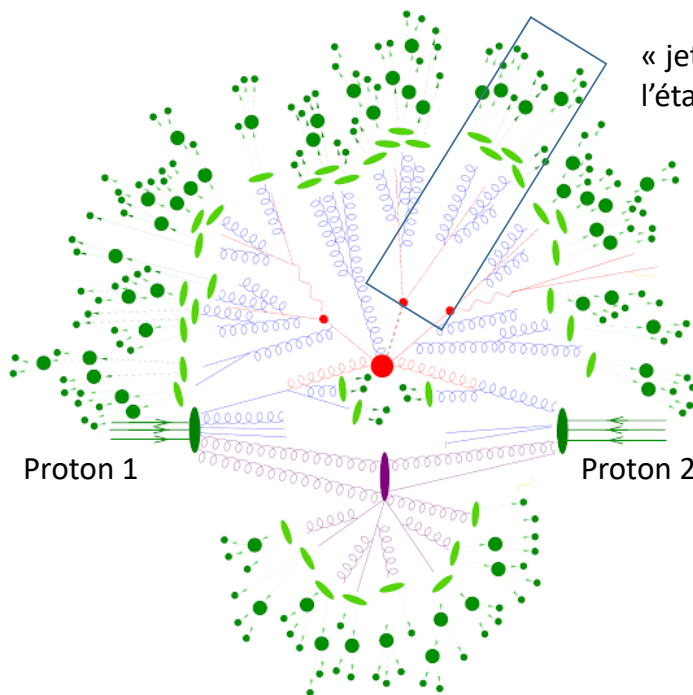
**... observé tout
récemment au CERN**



8

La TQC en action (suite)

Retour sur les collisions hadroniques (vision TQC):



« jet » : ensemble collimaté de particules dans l'état final

Le calcul détaillé de la production de ces jets reste un challenge pour les théoriciens des particules !



Idée qui germe en ce moment (plantée il y a longtemps par R.P. Feynman) : utiliser les algorithmes quantiques pour résoudre les problèmes quantiques

79

La TQC en action (suite)

Retour sur les collisions hadroniques (vision TQC):



YOUNGST@RS - The Quantumness of Hard Probes

17-21 janvier 2022
Mainz Institute for Theoretical Physics, Johannes Gutenberg University
Fuseau horaire Europe/Berlin

Accueil

Scientific Scope

General Information

This workshop aims to discuss and address challenges in hard probes, especially related to quantum mechanical aspects of these systems and how quantum computing could potentially provide tools to perform the needed computations.

80

Spin et limite non relativiste de l'éq. de Dirac

- ✓ On intègre le couplage au potentiel vecteur dans l'équation de Dirac =>

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(c\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\vec{A}\right) + mc^2\gamma^0\right)\psi \Rightarrow E\psi = \left(c\vec{\alpha} \cdot \left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\right) + mc^2\gamma^0\right)\psi$$

avec $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$ et $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$

- ✓ Limite non relativiste : $p \ll mc \Rightarrow$ Les solutions à énergie positive s'écrivent

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \psi_B = \mathcal{O}(p/mc) \times \psi_A$$

- ✓ On résout le couple d'équations $(E + mc^2)\psi_B = \dots \psi_A$ par rapport à ψ_B en supposant que $E \approx mc^2$, et on réinjecte la solution dans le premier couple d'équations. Il en découle :

$$E\psi_A = \left[mc^2\psi_A + \frac{(\vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A}))^2}{2m} \right] \cdot \boxed{\psi_A} \quad \leftarrow \text{Spineur non relativiste}$$

- ✓ Le membre de droite est donc un Hamiltonien effectif non-relativiste pour une particule de charge q plongée dans un potentiel magnétique vecteur.

81

Spin et limite non relativiste de l'éq. de Dirac

- ✓ Il reste à traiter correctement les matrices de Pauli apparaissant dans l'énergie cinétique... On observe en particulier la contribution suivante :

$$\frac{1}{2m} \left(\sum_j \sigma_j \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_j - qA_j(\vec{x}) \right) \times \sum_k \sigma_k \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_k - qA_k(\vec{x}) \right) \right) \psi_A$$



$$\hat{H}_{\text{NR}} = \dots + i \frac{\hbar q}{2m} \sum_{jk} \sigma_j \sigma_k \nabla_j A_k$$

- ✓ Pour illustrer le contenu physique de ce terme, supposons un potentiel vecteur dirigé selon Oy ($\Rightarrow k=2$) et dépendant uniquement de x ($\Rightarrow j=1$)

$$\Rightarrow \nabla_j A_k = B_3 \quad \text{avec} \quad \vec{B} = B_3 \vec{e}_z$$

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$$



$$\hat{H}_{\text{NR}} = \dots - \underbrace{\frac{q}{m} \frac{\hbar}{2} \sigma_3}_{\hat{S}_z} B_3 = \dots - \frac{q}{m} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}$$

82

Spin et limite non relativiste de l'éq. de Dirac

Interprétation : $\hat{H}_{\text{NR}} = E_{\text{kin}} - \frac{q}{m} \vec{S} \cdot \vec{B}$

- ✓ Le nouveau terme correspond à l'énergie magnétique d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, soit

$$E_{\text{dip.}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- ✓ On en déduit l'expression du moment dipolaire magnétique résultant de la théorie de Dirac ($q = -e$):

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m_e} \vec{S}$$

- ✓ À ce stade, il est important de rappeler le résultat classique pour une sphère uniformément chargée :

$$\vec{\mu}_{\text{cl}} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Ceci vient donc contredire l'image un peu trop simpliste qu'on se fait parfois du spin de l'électron (petit grain de matière qui tourne sur lui-même), car il en découlerait

$$\vec{\mu}_e = -\frac{e}{2m_e} \vec{S}$$

On a besoin de l'équation de Dirac pour obtenir la "bonne" valeur (expérimentale) 83

Spin et limite non relativiste de l'éq. de Dirac

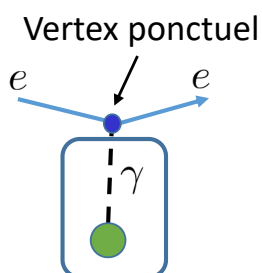
Interprétation (suite) :

- ✓ on pose $\vec{\mu}_e = -\boxed{g_e} \frac{e}{2m_e} \vec{S}$
↙ Facteur de Landé

- ✓ La théorie de Dirac prédit : $g_e = 2$
- ✓ La valeur expérimentale : $g_e^{\text{exp}} - 2 = 2,319\,304\,362\,56(35) \times 10^{-3}$
- ✓ Théorie : Au delà de Dirac : la TQC

$$g_e^{\text{th}} - 2 = 2,319\,304\,365\,58(15) \times 10^{-3}$$

Diffusion d'un électron sur un champ B



A l'ordre le plus bas de la TQC, les interactions entre un électron et le champ B font intervenir un "vertex" ponctuel; le résultat est identique à celui de l'équation de Dirac.

Champ (électro)magnétique externe = source de photon

Spin et limite non relativiste de l'éq. de Dirac

Interprétation (suite) :

✓ on pose $\vec{\mu}_e = -\boxed{g_e} \frac{e}{2m_e} \vec{S}$

↙ Facteur de Landé

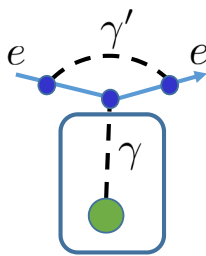
✓ La théorie de Dirac prédit : $g_e = 2$

✓ La valeur expérimentale : $g_e^{\text{exp}} - 2 = 2,319\,304\,362\,56(35) \times 10^{-3}$

✓ Théorie : Au delà de Dirac : la TQC

$$g_e^{\text{th}} - 2 = 2,319\,304\,365\,58(15) \times 10^{-3}$$

Diffusion d'un électron sur un champ B



A l'ordre suivant en la "constant de couplage", une "correction de vertex" apparaît: l'électron émet un photon virtuel γ' avant d'interagir avec le champ externe. Il réabsorbe ensuite le photon virtuel. Ceci modifie la nature de l'objet qui interagit avec le champ externe.

J. Schwinger (1948)

Champ (électro)magnétique externe = source de photon

85

Toujours vivant ?

Des questions ?