

Meca Q TD : particules identiques

1 – Deux fermions dans un potentiel harmonique

On considère un système composé de deux fermions identiques de spin $\frac{1}{2}$ qui n'interagissent pas entre eux.

On rappelle que la fonction d'onde totale du système peut se décomposer en une partie orbitale et une partie spin :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{S}_1; \vec{r}_2, \vec{S}_2) = \varphi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) \chi(\vec{S}_1; \vec{S}_2)$$

- 1) Rappeler postulat de symétrisation. Quelle symétrie doit avoir la fonction d'onde totale du système ?

Ce sont des fermions donc asymétrique.

- 2) Ecrire les parties orbitales de la fonction d'onde symétriques et antisymétriques notées respectivement φ_s et φ_a .

Pour le symétrique : $11\ 22 + 12\ 21$, pour l'antisymétrique : $11\ 22 - 12\ 21$.

- 3) Ecrire les parties spin de la fonction d'onde symétrique et antisymétrique. On pourra noter pour simplifier $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |+\rangle$ et $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle$.

On écrit le triplet pour le cas symétrique ($++$ ou $--$ ou $+-$ ou $-+$) et le singulet pour le cas asymétrique ($+-$ ou $-+$).

- 4) En déduire les fonctions d'onde totales possibles pour le système.

Produits asymétrique/symétrique ou symétrique/asymétrique. Ne pas oublier le facteur $\frac{1}{2}$.

On considère maintenant que les deux fermions sont dans un potentiel harmonique commun. Le Hamiltonien du fermion j ($j = 0$ ou 1) s'écrit :

$$H_j = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} m\omega x_j^2$$

Où m est la masse du fermion et ω la fréquence de l'oscillateur.

Dans ce potentiel les énergies propres d'un fermion s'écrivent :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Et les états propres associés aux deux premiers niveaux d'énergies :

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi x_0^3}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

Avec $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

- 5) Vérifier que x_0 a la dimension d'une distance.

Typiquement cette question est facultative, mais pourquoi pas leur laisser faire un peu d'analyse dimensionnelle.

- 6) Quelle est l'énergie totale du système dans l'état fondamental, c'est-à-dire lorsque $n_1 = n_2 = 0$?
Comme il n'y a pas d'interaction entre les fermions, c'est juste la somme de deux E_{n_0} soit $\hbar\omega$
- 7) Quelle est la fonction d'onde totale du système dans l'état fondamental ? L'état fondamental est-il dégénéré ?
Pour rester asymétrique il faut considérer les deux possibilités du dans la première partie du problème, orbitale symétrique avec le singulet ou orbitale anti avec le triplet. Il faut montrer que ce 2^e cas la partie orbitale anti s'annule, et donc il ne reste que la symétrique avec le singulet : $\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi x_0}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2}\right)(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$ pas de dégénérescence.
- 8) Pour le premier état excité, $n_1 = 1$ et $n_2 = 0$ ou $n_1 = 0$ et $n_2 = 1$. Quelle est l'énergie totale du système ?
Trivial. On peut fusionner cette question avec la dernière.
- 9) Quelles sont les fonctions d'ondes possibles pour ce premier état excité ? Quel est son degré de dégénérescence ?
Cette fois si la partie orbitale anti n'est pas forcément nulle car on a deux états sur lesquels jouer. Il faut écrire les produits de φ_0 et φ_1 sous la forme φ_s et φ_a vu plus tôt. Le degré de dégénérescence est donc 4.

2 – Atome de carbone

Pour le premier exercice c'est un simple exemple de la procédure vu en cours pour décrire le tableau périodique. Si les notations spectroscopiques n'ont pas été vue en cours il faudra étoffer pour les introduire.

L'atome de carbone est composé de 6 électrons.

- 1) Quel est la configuration de l'atome de carbone à l'état fondamental ?
Ecrire $1s^2 2s^2 2p^2$.
- 2) Quelles sont les valeurs possibles pour le spin total de l'atome de carbone et le moment angulaire total ?
Pour le Spin : combinaison de $2 \times \frac{1}{2}$ donc 0 ou 1. Pour le moment angulaire : 0, 1 ou 2.