

# Meca Q TD : particules identiques

## 1 – Deux fermions dans un potentiel harmonique

On considère un système composé de deux fermions identiques de spin  $\frac{1}{2}$  qui n'interagissent pas entre eux. On rappelle que la fonction d'onde totale du système peut se décomposer en une partie orbitale et une partie spin :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{S}_1; \vec{r}_2, \vec{S}_2) = \varphi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) \chi(\vec{S}_1; \vec{S}_2)$$

- 1) Rappeler postulat de symétrisation. Quelle symétrie doit avoir la fonction d'onde totale du système ?
- 2) Écrire les parties orbitales de la fonction d'onde symétriques et antisymétriques notées respectivement  $\varphi_s$  et  $\varphi_a$ .
- 3) Écrire les parties spin de la fonction d'onde symétrique et antisymétrique. On pourra noter pour simplifier  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |+\rangle$  et  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle$ .
- 4) En déduire les fonctions d'onde totales possibles pour le système.

On considère maintenant que les deux fermions sont dans un potentiel harmonique commun. Le Hamiltonien du fermion  $j$  ( $j = 0$  ou  $1$ ) s'écrit :

$$H_j = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} m \omega x_j^2$$

Où  $m$  est la masse du fermion et  $\omega$  la fréquence de l'oscillateur.

Dans ce potentiel les énergies propres d'un fermion s'écrivent :

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Et les états propres associés aux deux premiers niveaux d'énergies :

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi} x_0^3}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$\text{Avec } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

- 5) Vérifier que  $x_0$  a la dimension d'une distance.
- 6) Quelle est l'énergie totale du système dans l'état fondamental, c'est-à-dire lorsque  $n_1 = n_2 = 0$  ?
- 7) Quelle est la fonction d'onde totale du système dans l'état fondamental ? L'état fondamental est-il dégénéré ?

- 8) Pour le premier état excité,  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 0$  ou  $n_1 = 0$  et  $n_2 = 1$ . Quelle est l'énergie totale du système ?
- 9) Quelles sont les fonctions d'ondes possibles pour ce premier état excité ? Quel est son degré de dégénérescence ?

## **2 – Atome de carbone**

L'atome de carbone est composé de 6 électrons.

- 1) Quel est la configuration de l'atome de carbone à l'état fondamental ?
- 2) Quelles sont les valeurs possibles pour le spin total de l'atome de carbone et le moment angulaire total ?