La méca Q dans ses retranchements

Pol B Gossiaux (Département SUBATECH)

27/1/2022

gossiaux@imt-atlantique.fr

Les ambitions de cette présentation :

- ✓ Ne pas me substituer à la conférence d'Alain Aspect (reportée au 8 avril).
- ✓ Débroussailler le terrain du point de vue des concepts, du formalisme, des calculs

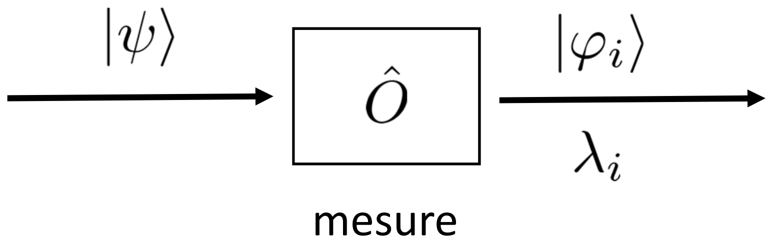
Au menu :

- ✓ La mesure
- ✓ La mesure de spin
- ✓ Déterminisme et variables cachées
- ✓ Mesure de spin (photons)
- ✓ Intrication
- ✓ Einstein, Podolsky et Rosen
- ✓ Les inégalités de Bell
- ✓ La décohérence

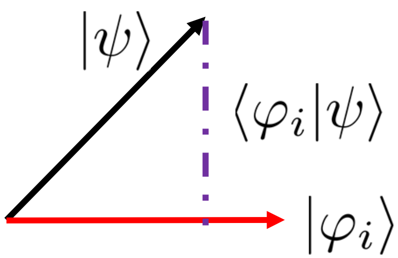
Mesure …

<u>Rappel:</u>

- ✓ Un des postulats fondamentaux de la méca Q : à l'occasion de la mesure d'une observable (décrite par un opérateur hermitique), l'état quantique se trouve projeté – de manière non prédictible – sur un des états propres de cet opérateur, tandis que la valeur propre associée est observée.
- ✓ En mécanique quantique, on adopte souvent la notation « bra » et « ket ». Ainsi, la projection de l'état (normalisé) $|\psi\rangle$ sur l'état propre $|\varphi_i\rangle$ (aussi normalisé) s'écrit $\langle\varphi_i|\psi\rangle$ (nombre complexe), et le postulat ci-dessus se représente.



- ✓ L'opérateur « projection sur $|\varphi_i\rangle$ » se note ainsi $\hat{P}(\varphi_i) := |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$



- ✓ $\hat{P}(\varphi_i)|\psi\rangle = \langle\varphi_i|\psi\rangle|\varphi_i\rangle$ représente donc la composante selon $|\varphi_i\rangle$ de $|\psi\rangle$

Mesure …

Rappel:

- ✓ !!! A l'issue d'un processus de mesure au cours duquel la valeur λ_i est observée, l'état final de l'état réduit est bien $|\varphi_i\rangle$ et non pas $\langle\varphi_i|\psi\rangle|\varphi_i\rangle$ (c'est la même chose à un facteur de normalization près)
- ✓ Relation de complétude : $\sum_i \hat{P}(\varphi_i) = \hat{\mathbb{I}}$
- ✓ La probabilité de mesurer la valeur λ_i au cours d'une mesure unique est

$$p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$$

- ✓ La valeur moyenne de l'observable obtenue en répétant un (très) grand nombre de fois la mesure est $\bar{O} := \sum_i p_i \lambda_i = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$

En effet : soit $a_i := \langle\varphi_i|\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_i a_i|\varphi_i\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\hat{O}|\psi\rangle = \sum_i a_i \hat{O}|\varphi_i\rangle = \sum_i a_i \lambda_i |\varphi_i\rangle$$

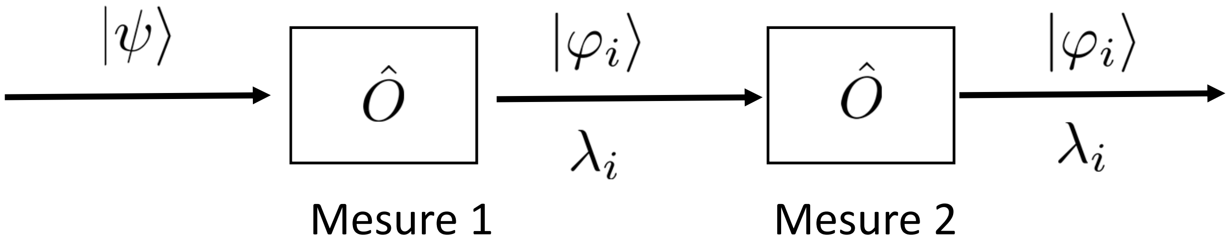
$$\Downarrow$$

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \left(\sum_j a_j^\star \langle\varphi_j|\right) \sum_i a_i \lambda_i |\varphi_i\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i a_j^\star a_i \underbrace{\langle\varphi_j|\varphi_i\rangle}_{\delta_{i,j}} = \sum_i \lambda_i \underbrace{|a_i|^2}_{p_i}$$

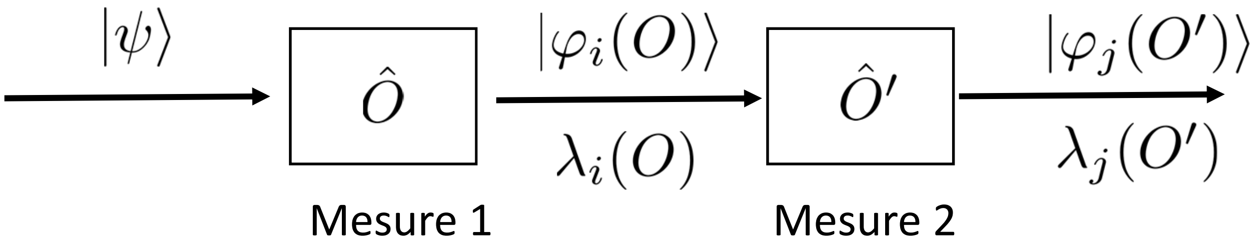
Mesure …

<u>Rappel:</u>

- ✓ On peut imaginer effectuer plusieurs mesures de la même quantité en réinjectant l'état quantique réduit dans le même appareillage de mesure. On n'observe alors aucune réduction supplémentaire de l'état quantique :



- ✓ Si on effectue la mesure d'une autre observable $\hat{O}'$ à la suite de la première, l'état quantique se trouve à nouveau « réduit » à la suite de la seconde mesure :



(cf cours de G. Batigne)

- ✓ … sauf dans le cas d'observables « compatibles » pour lesquelles la mesure de l'une des observables n'aura aucune influence sur les résultats de mesure de l' autre :

Critère mathématique: $[\hat{O}, \hat{O}'] = 0$

Mesure de spin

Rappel (?):

- ✓ Soit un « polariseur de spin » à la Stern et Gerlach, orienté selon la direction $\vec{a}$

$$\|\vec{a}\| = 1$$

- ✓ L'opérateur hermitique associé à la mesure de spin par ce dispositif est

$$\hat{S}_{\vec{a}} := \frac{\hbar}{2}\, \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

(le hbar va désormais être pris égal à 1)

où σ désigne les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- ✓ On a ainsi

$$\hat{S}_{\vec{a}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

- ✓ Valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} \frac{a_3}{2} - \lambda & \frac{a_1 - ia_2}{2} \\ \frac{a_1 + ia_2}{2} & -\frac{a_3}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\frac{a_3}{2})^2 - \frac{a_1 + ia_2}{2} \frac{a_1 - ia_2}{2} = 0$$

$$\boxed{\lambda = \pm\frac{1}{2}}$$

Le spin est donc bien quantifié indépendamment de la direction de quantification

Mesure de spin

- ✓ Les vecteurs propres s'expriment quant à eux au plus simplement en recourant aux coordonnées sphériques de $\vec{a}$, soit

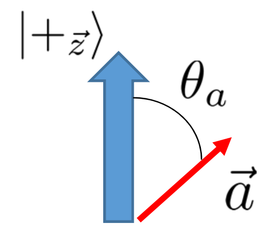
$$\vec{a} = (\sin\theta_a \cos\varphi_a, \sin\theta_a \sin\varphi_a, \cos\theta_a)$$

- ✓ Il vient alors $|+_{\vec{a}}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_a}{2} \\ \sin\frac{\theta_a}{2} e^{i\varphi_a} \end{pmatrix}$ $\quad |-_{\vec{a}}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta_a}{2} e^{-i\varphi_a} \\ \cos\frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix}$

Notez le demi-angle

qui sont bien orthogonaux :

$$\langle -_{\vec{a}} | +_{\vec{a}} \rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta_a}{2} e^{+i\varphi_a} & \cos\frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_a}{2} \\ \sin\frac{\theta_a}{2} e^{i\varphi_a} \end{pmatrix} = 0$$

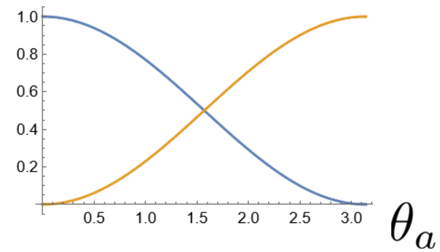


- ✓ Si on considère un spineur initial dans l'état $|+_{\vec{z}}\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qu'on le mesure par un tel polariseur, on trouve que la probabilité de mesurer la valeur + ½ vaut

$$p(+) = |\langle +_{\vec{a}} | +_{\vec{z}} \rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta_a}{2}$$

- ✓ … tandis que la probabilité de mesurer la valeur - ½ vaut

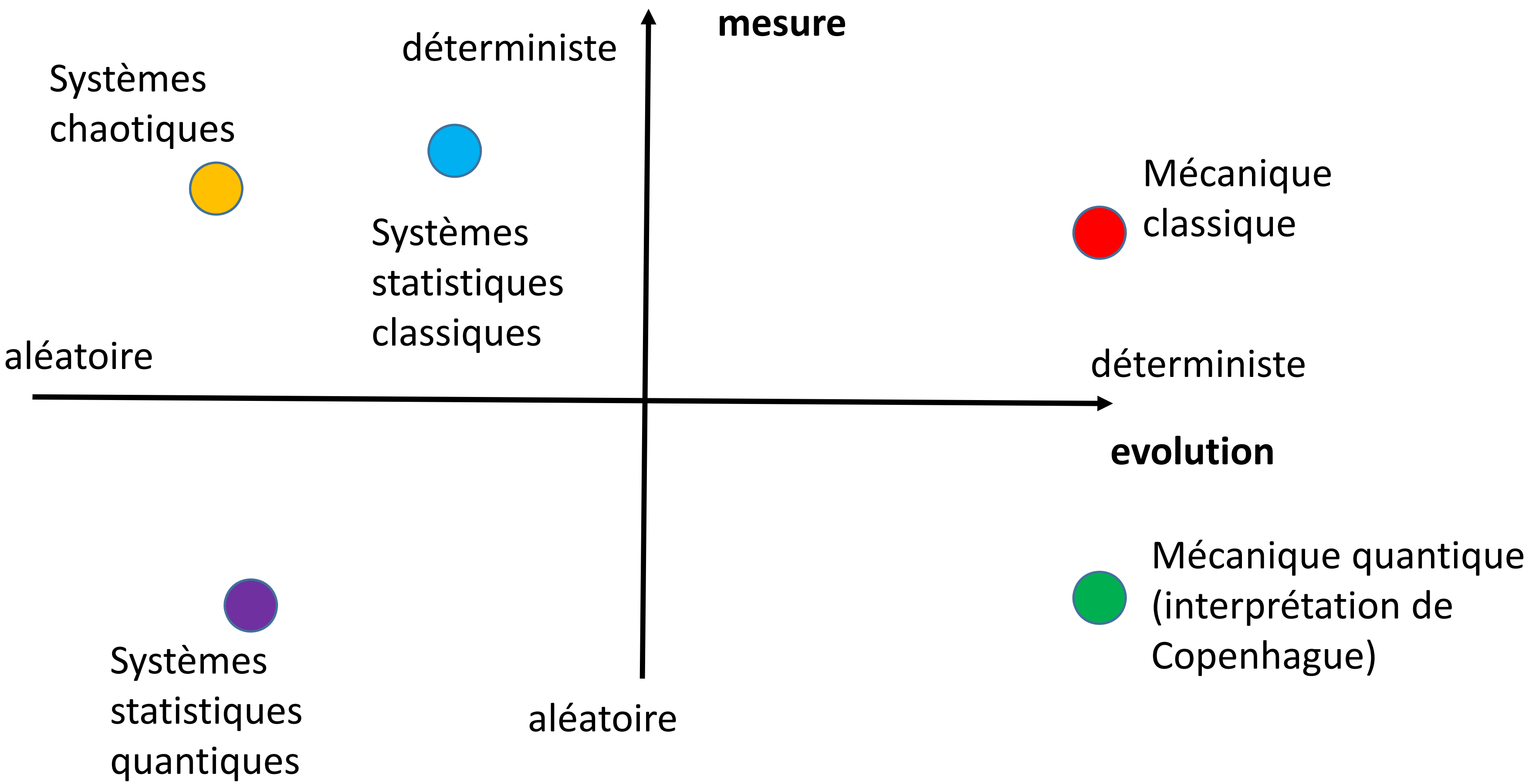
$$p(-) = |\langle -_{\vec{a}} | +_{\vec{z}} \rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta_a}{2}$$



- ✓ La valeur moyenne de $S_{\vec{a}}$ mesurée sur un grand nombre de répétitions vaut donc simplement

$$2\bar{S}_{\vec{a}} = \cos^2\frac{\theta_a}{2} - \sin^2\frac{\theta_a}{2} = \cos\theta_a = \vec{z}\cdot\vec{a}$$

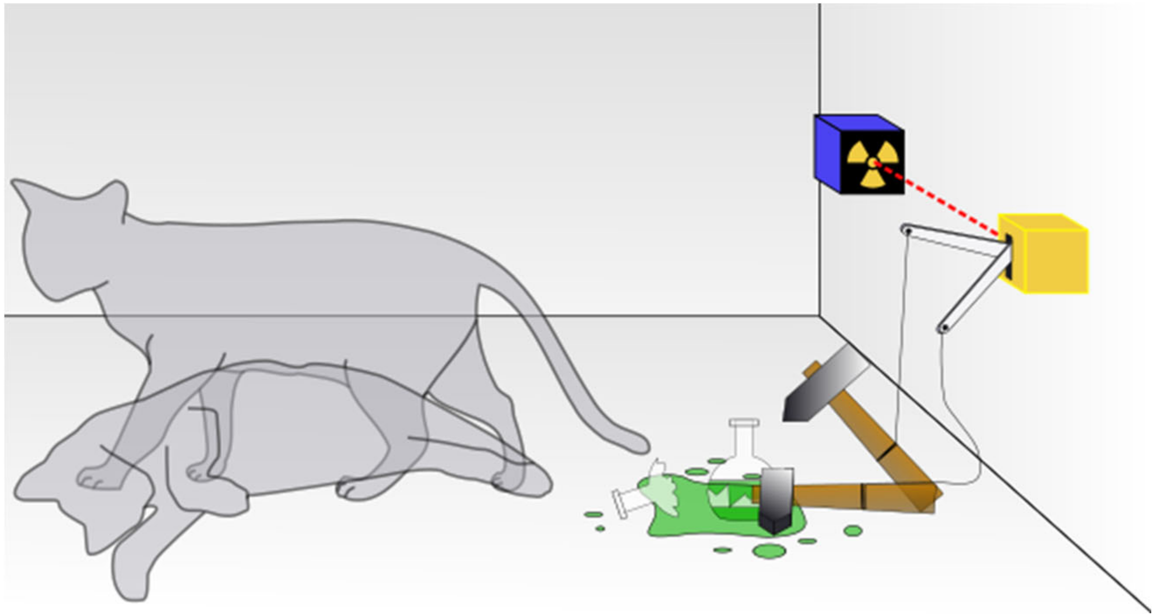
Déterminisme en physique



À quoi est dû le hasard ???

Point de vue de N. Bohr (interprétation de Copenhague)

La mesure physique de l’état ne peut être dissociée de l’appareillage de mesure, et cette cohésion doit être maintenue au sens strict => une description complète doit donc intégrer la fonction d’onde du photon ET de l’appareillage de mesure.

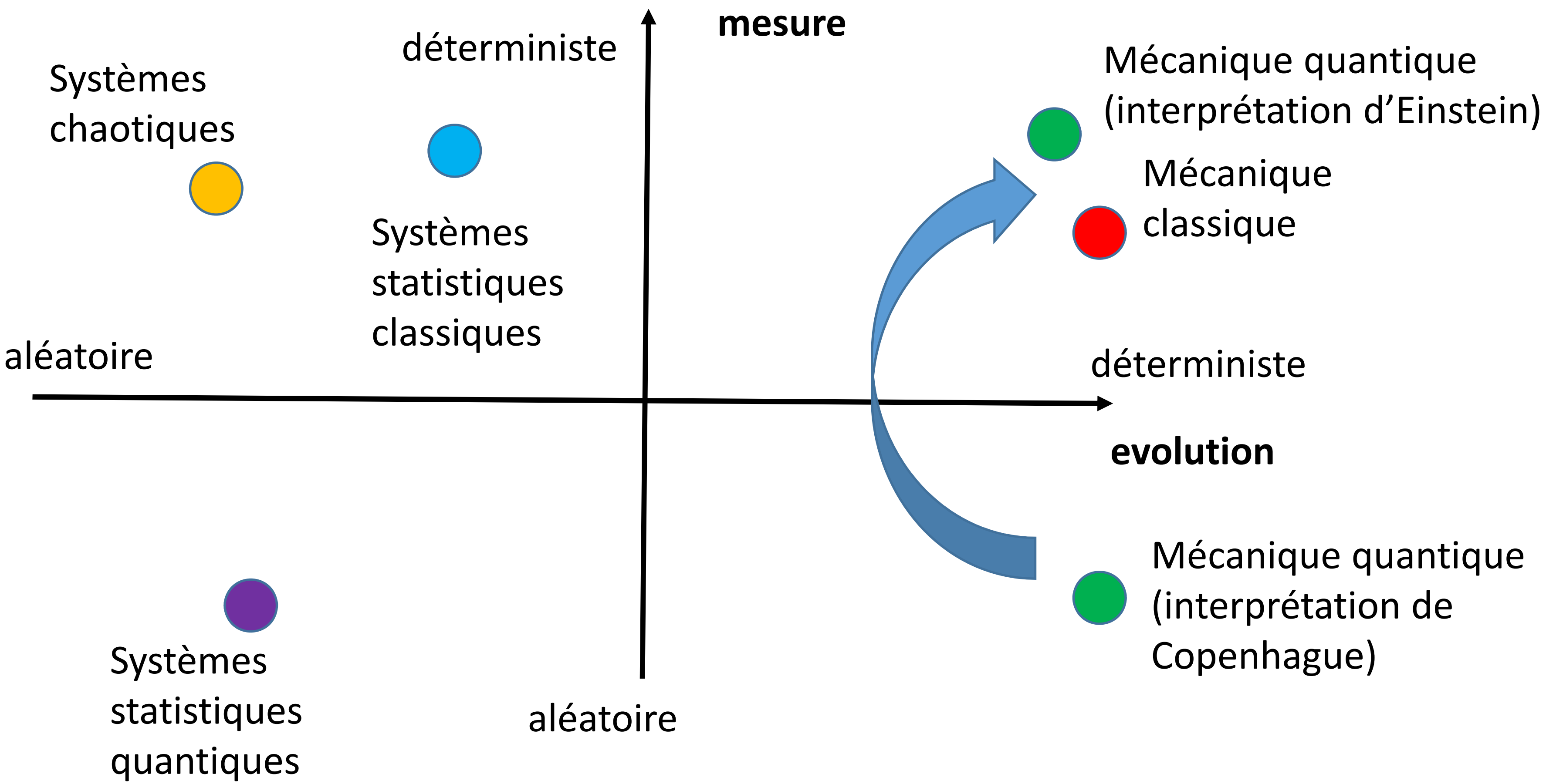


Suite à la désintégration radioactive, Le chat est-il vivant ou mort ? : tant que je ne regarde pas, je ne peux pas savoir…

Mais quand se passe la bifurcation, et quels éléments implique-t-elle ?

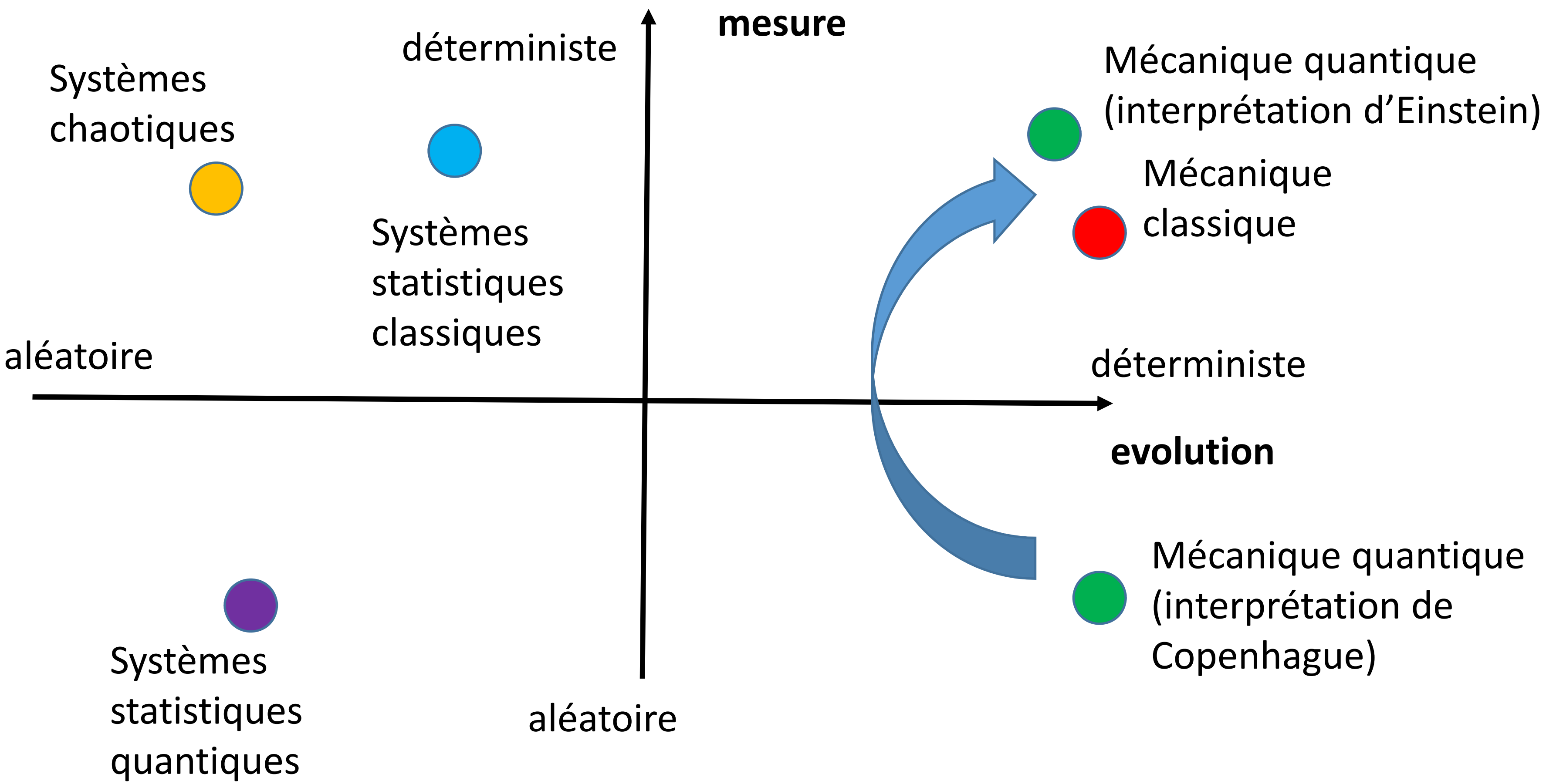
Outre les questionnements philosophiques, une question plus pratique se pose : **“Comment une théorie déterministe de l’evolution peut-elle aboutir à une mesure aléatoire si l’appareil de mesure doit être intégré dans la description ?”** ou encore “Qu’est ce qui incarne les observables hermitiques ?”

Déterminisme en physique



En physique statistique, le "hasard" est dû a une partie masquée / perdue de l'information… Et si c'était pareil en mécanique quantique ?

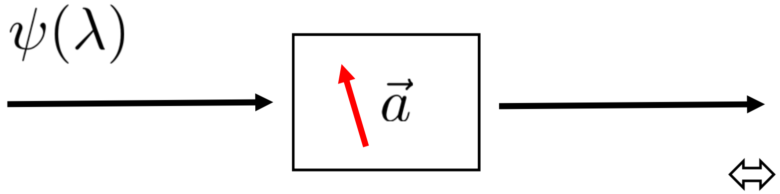
Le concept de variables cachées



<u>Postulat</u>: derrière chaque état quantique se "cache" en fait une (ou plusieurs) variable(s) aléatoire(s) λ (au sens de la physique statistique) qui pré-déterminent les résultats des futures mesures. Ces variables peuvent alors être conçues comme le résultat d'une dynamique inaccessible à notre echelle mais déterministe ("Dieu ne joue pas aux dés")

Mesure de spin et variables cachées

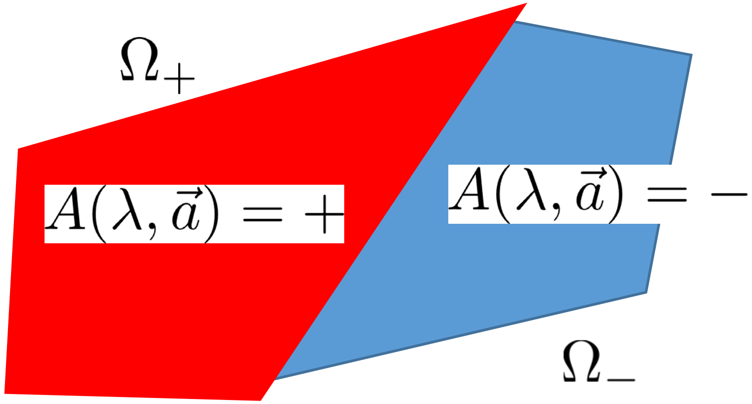
Préparation de λ



mesure $\pm\left(\frac{\hbar}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ Valeur d'une function $A(\vec{a},\lambda)$

- ✓ La mesure ne va pas réduire l'état mais bien permettre de "sonder" la variable cachée λ.

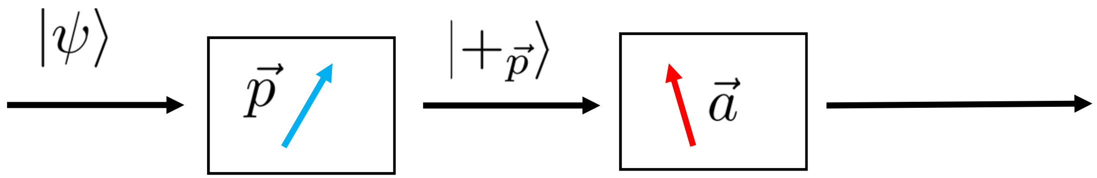


- ✓ Si $\lambda \in \Omega_+$ la valeur + est mesurée avec 100% de probabilité. Si $\lambda \in \Omega_-$ la valeur - est mesurée avec 100% de probabilité.
- ✓ La moyenne vaut alors simplement : $2\bar{S}_{\vec{a}} = \bar{A} = \Omega_+ - \Omega_-$

Et c'est possible ?

Mesure de spin et variables cachées

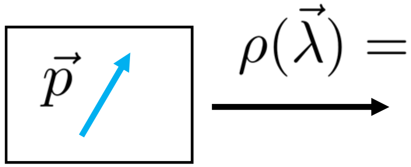
- ✓ Mécanique Q “usuelle” :



polariseur

Mesure: $2\bar{S}_{\vec{a}} = \vec{p}\cdot\vec{a} = \cos\theta$

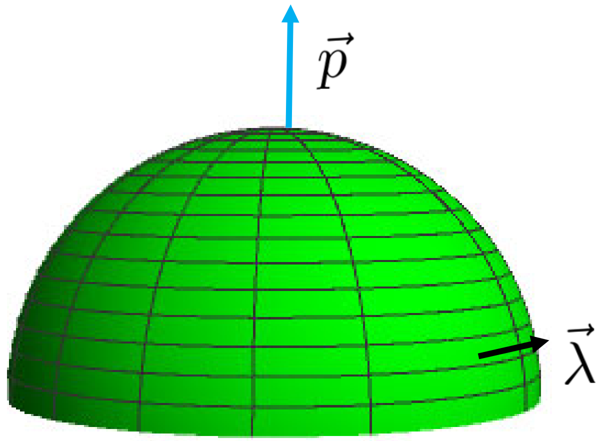
- ✓ Variables cachées:



$$\rho(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2\pi}\Theta(\vec{\lambda}\cdot\vec{p})$$

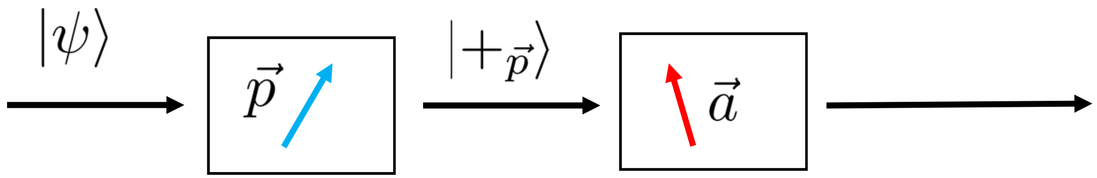
polariseur

Préparation de λ,



Mesure de spin et variables cachées

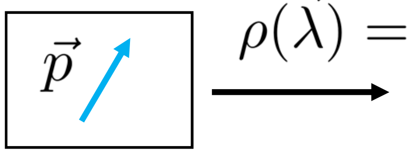
- ✓ Mécanique Q "usuelle" :



polariseur

Mesure: $2\bar{S}_{\vec{a}} = \vec{p}\cdot\vec{a} = \cos\theta$

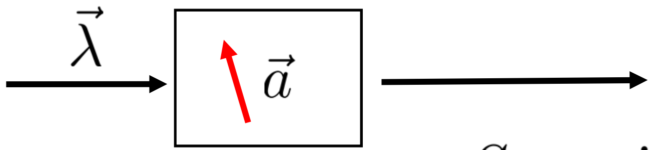
- ✓ Variables cachées:



$\rho(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2\pi}\Theta(\vec{\lambda}\cdot\vec{p})$

polariseur

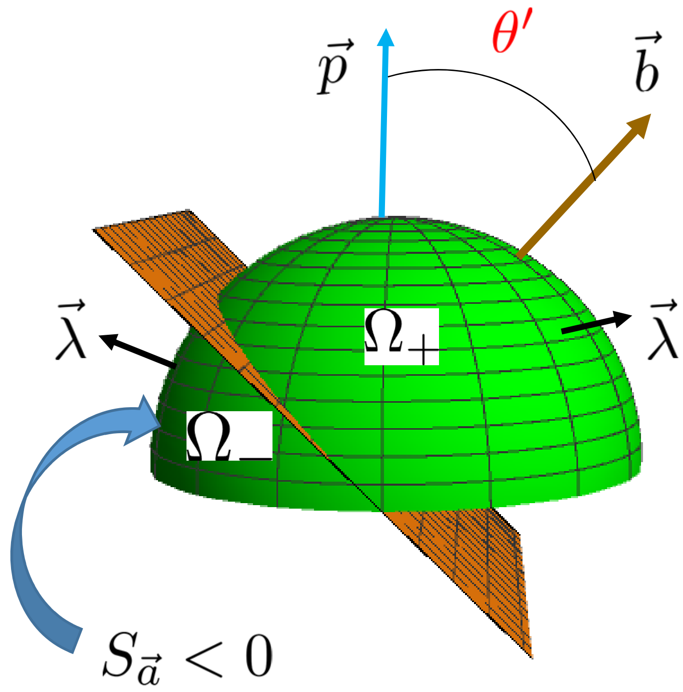
Préparation de λ,



Mesure: $S_{\vec{a}} = \mathrm{signe}(\vec{\lambda}\cdot\vec{b}(\vec{a},\vec{p}))$

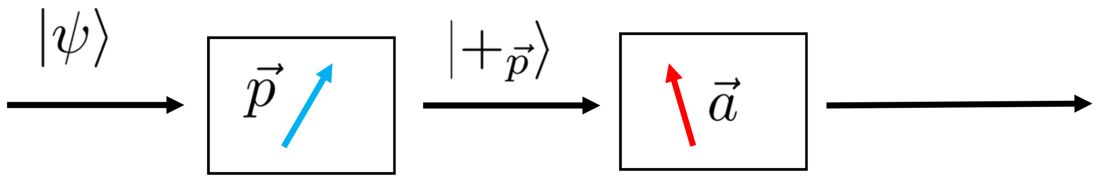
$$\mathrm{prob}(\vec{\lambda}\in\Omega_-) = \frac{\theta'}{\pi}$$

Rapport entre la surface de l'onglet et celle de l'hémisphère



Mesure de spin et variables cachées

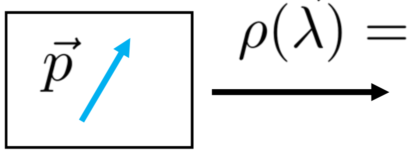
- ✓ Mécanique Q “usuelle” :



polariseur

Mesure: $2\bar{S}_{\vec{a}} = \vec{p}\cdot\vec{a} = \cos\theta$

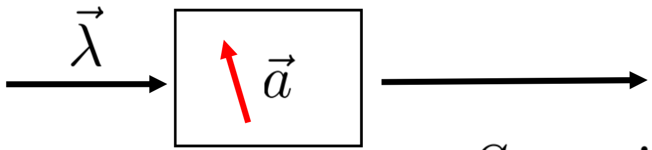
- ✓ Variables cachées:



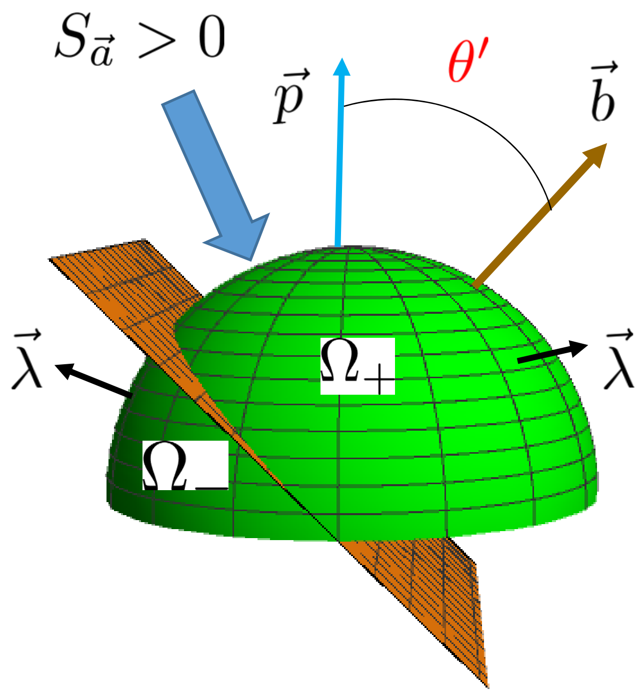
$\rho(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2\pi}\Theta(\vec{\lambda}\cdot\vec{p})$

polariseur

Préparation de λ,



Mesure: $S_{\vec{a}} = \mathrm{signe}(\vec{\lambda}\cdot\vec{b}(\vec{a},\vec{p}))$

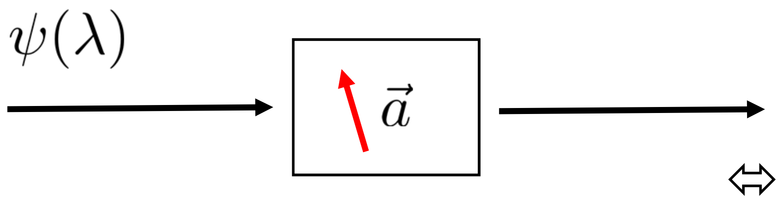


$$\mathrm{prob}(\vec{\lambda}\in\Omega_+) = 1 - \frac{\theta'}{\pi}$$

$2\bar{S}_{\vec{a}} = 1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos\theta$ si $\theta' = \frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)$ fixe le $\vec{b}$

Mesure de spin et variables cachées

Préparation
de λ



mesure $\pm\left(\frac{\hbar}{2}\right)$

⇔ Valeur d'une function
$A(\vec{a},\lambda)$

- ✓ L'approche des variables cachées permet de rerpoduire les résultats de l'interprétation usuelle de Copenhague

- ✓ La théorie à variables cachées de reference : l'approche [bohmienne] dans laquelle la function d'onde joue le rôle de l'onde guide pour des particules qui constituent les fameuses variables cachées (ou complémentaires). Selon cette interprétation, chaque particule passe bien par une seule des deux fentes !!!

Mais non localités ! (on y reviendra)

Mesure de spin (photon)

- ✓ Faisceau de photons allant dans la direction Oz. Un photon possède un spin = 1
- ✓ L'opérateur S_z pour une particule de spin 1 s'écrit

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

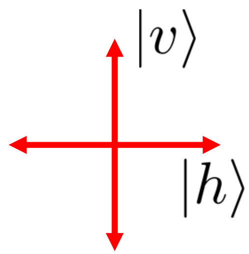
- ✓ Il possède 3 valeurs propres : -1, 0, 1. La v.p. 0 correspond à une polarisation longitudinale des photons, impossible dans le vide. Aux deux autres polarisations (transverses) sont associées les vecteurs propres

$$\xi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

N.B.: Elle correspondent, en physique classique, aux 2 polarisations circulaires.

- ✓ On préfère toutefois travailler avec une base correspondant à des polarisations linéaires du champ électrique :

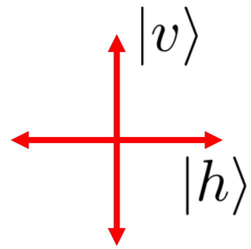
$$\xi_x \equiv |v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi_y \equiv |h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



On va omettre cette composante pour les photons concernés

Mesure de spin (photon)

- ✓ Les deux vecteurs de la base dans l'espace de Hilbert correspondent dès lors à deux polarisations orthogonales (on se souvient : pour le spin, il s'agissait de 2 polarisations *opposées* ⇔ demi-angle)



- ✓ Des photons (se propageant selon Oz) polarisés suivant la direction

$$\vec{a} = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$$

admettent, pour état quantique :

$$|+_\theta\rangle := \cos\theta |v\rangle + \sin\theta |h\rangle$$

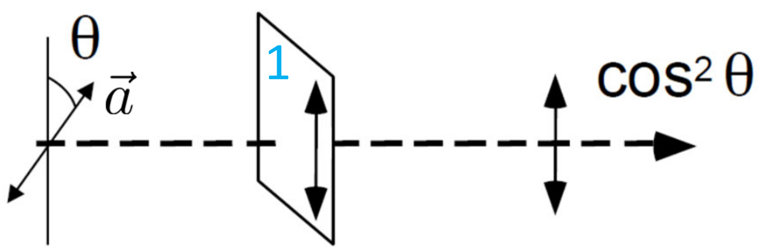
- ✓ Des photons que l'on prépare dans cet état et que l'on envoie sur un polariseur à une voie orienté verticalement (et considéré comme un appareil de mesure quantique) seront projetés sur l'état $|v\rangle$ (et donc transmis) avec une probabilité

$$p(v) = |\langle v|+_\theta\rangle|^2 = \cos^2\theta$$

Version quantique de la Loi de Malus

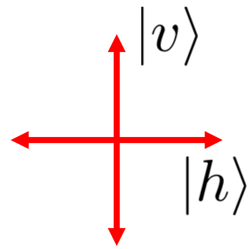
N.B.: le photon est projeté sur h
et réfléchi avec une probabilité

$$p(h) = |\langle h|+_\theta\rangle|^2 = \sin^2\theta$$



Polariseur 1 voie

Mesure de spin (photon)



- ✓ Les deux vecteurs de la base dans l'espace de Hilbert correspondent dès lors à deux polarisations orthogonales (on se souvient : pour le spin, il s'agissait de 2 polarisations *opposées* ⇔ demi-angle)

- ✓ Des photons (se propageant selon Oz) polarisés suivant la direction

$$\vec{a} = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$$

admettent, pour état quantique :

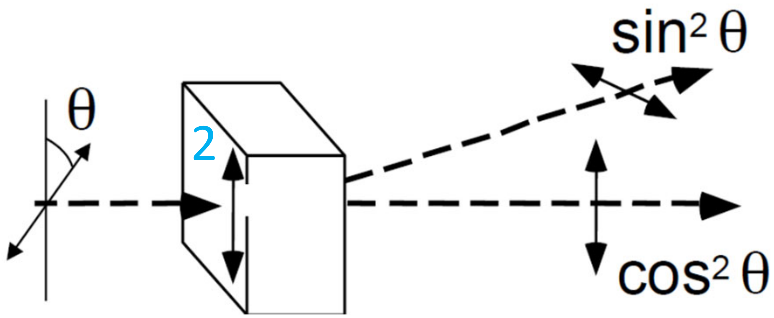
$$|+_\theta\rangle := \cos\theta|v\rangle + \sin\theta|h\rangle$$

- ✓ Des photons que l'on prépare dans cet état et que l'on envoie sur un polariseur à deux voies orienté comme illustré ci-dessous (et considéré comme un appareil de mesure quantique) seront projetés sur l'état $|v\rangle$ avec une probabilité

$$p(v) = |\langle v|+_\theta\rangle|^2 = \cos^2\theta$$

et sur l'état $|h\rangle$ avec la probabilité

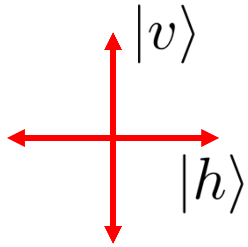
$$p(h) = |\langle h|+_\theta\rangle|^2 = \sin^2\theta$$
$$= \cos^2(\tfrac{\pi}{2} - \theta)$$

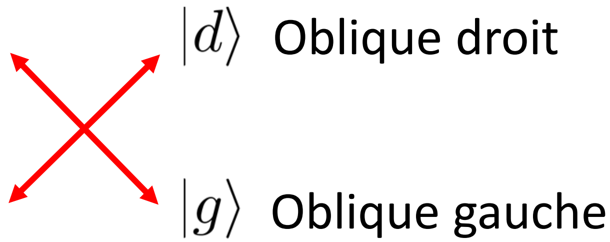


Polariseur 2 voies

Mesure de spin (photon)

✓ Tout comme pour les états « spin ½ », on peut former d'autres bases :

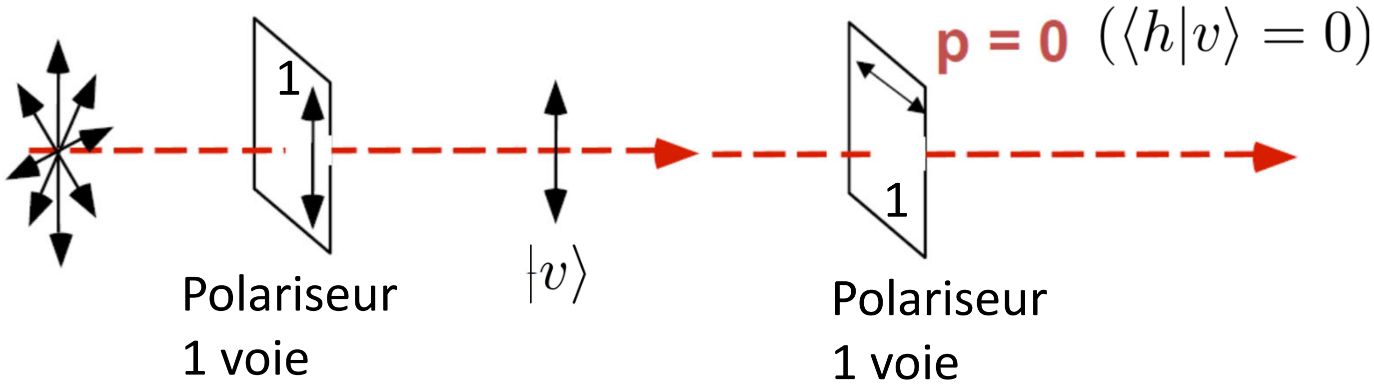




$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle + |h\rangle\right)$$

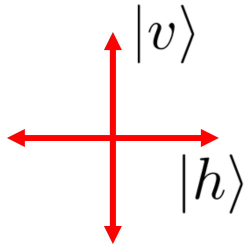
$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle - |h\rangle\right)$$

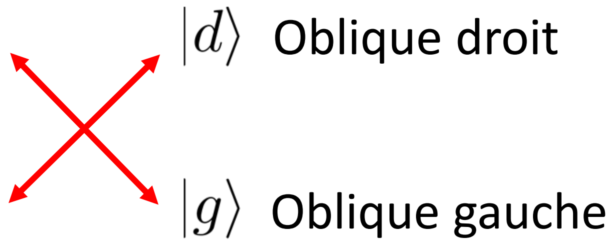
✓ Tout comme pour les Stern-Gerlach, on peut combiner des polariseurs successifs orientés selon diverses directions :



Mesure de spin (photon)

- ✓ Tout comme pour les états « spin ½ », on peut former d'autres bases :

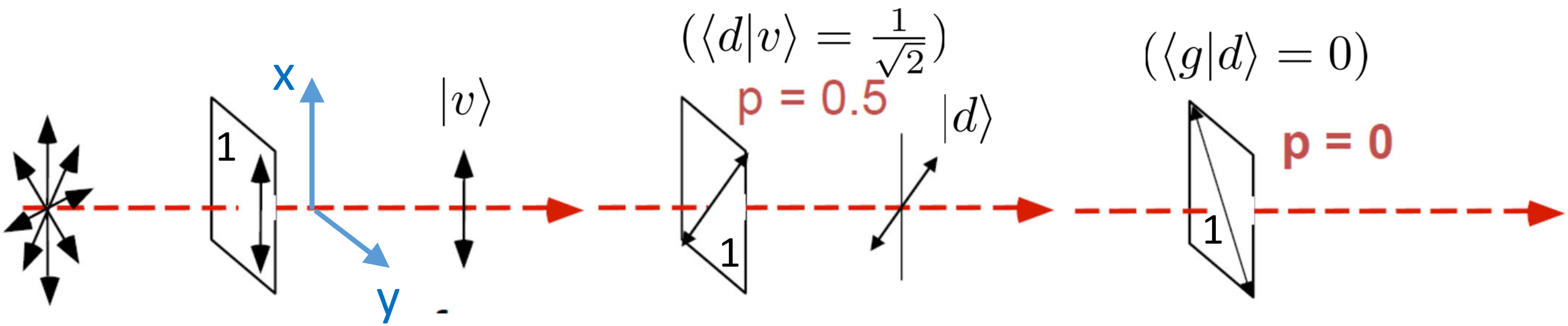




$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle + |h\rangle\right)$$

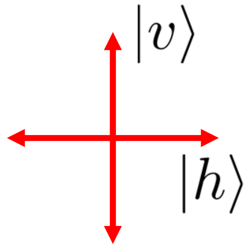
$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle - |h\rangle\right)$$

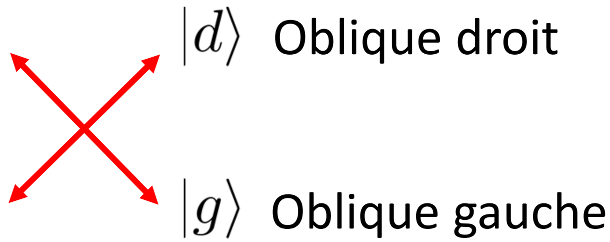
- ✓ Tout comme pour les Stern-Gerlach, on peut combiner des polariseurs successifs orientés selon diverses directions :



Mesure de spin (photon)

- ✓ Tout comme pour les états « spin ½ », on peut former d'autres bases :



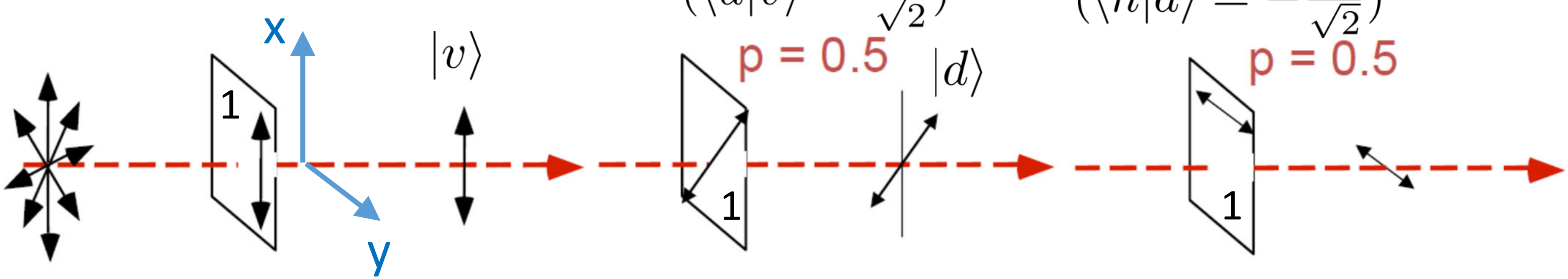


$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle + |h\rangle\right)$$

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v\rangle - |h\rangle\right)$$

- ✓ Tout comme pour les Stern-Gerlach, on peut combiner des polariseurs successifs orientés selon diverses directions :

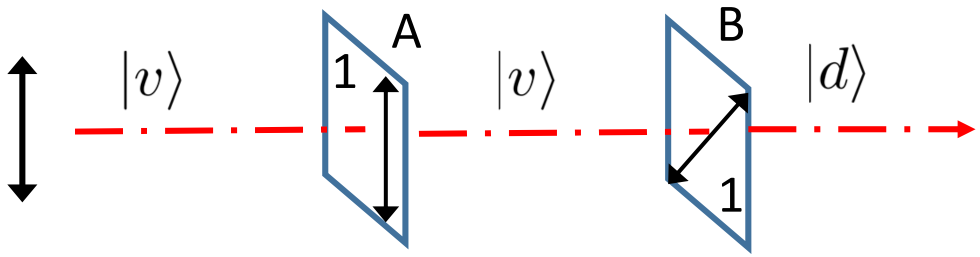
$$(\langle d|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}) \qquad (\langle h|d\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}})$$



Mesure “simultanée” de DEUX spins

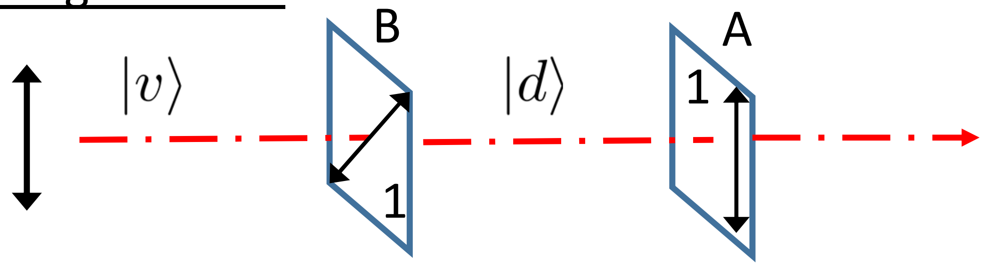
- ✓ En réalité, rien n’est parfaitement simultané, l’une des deux observables est toujours mesurée avant l’autre :

<u>Configuration 1</u>:

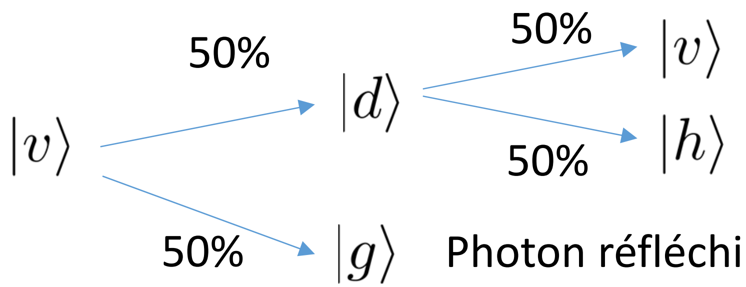


A mesure “v” dans 100% des cas tandis que B mesure “d” dans 50% des cas et “g” dans 50% des cas

<u>Configuration 2</u>:



B mesure “d” dans 50% des cas et “g” dans 50% des cas (idem configuration 2) mais A mesure “v” dans 50% des cas (mesurés) et “h” dans 50% des cas.



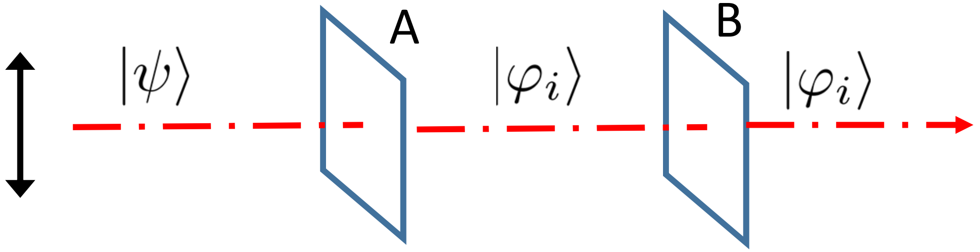
$$|\langle h|d\rangle|^2 = |\langle v|d\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

- ✓ En général, le résultat d’une observable influence l’autre, les deux mesures ne « commutent » pas (d’où le commutateur) !

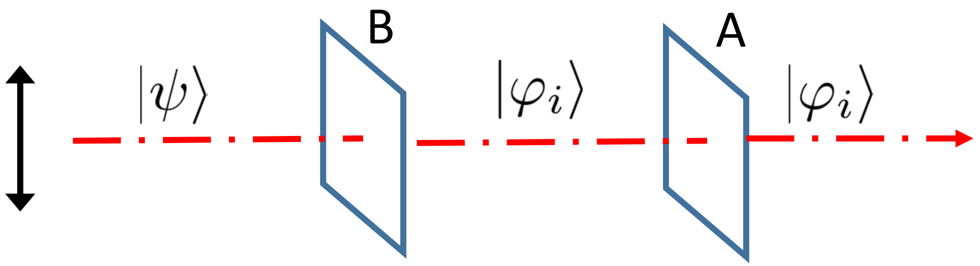
Mesure “simultanée” de DEUX spins

- ✓ En général, le résultat d’une observable influence l’autre, les deux mesures ne « commutent » pas (d’où le commutateur) et ne sont donc pas « compatible » : Le résultat de l’une influence sur l’autre.

- ✓ Exception notoire : lorsque deux observables commutent : $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ et ont donc les mêmes états propres



A mesure “φ_i” avec une probabilité de p_i ; B mesure ensuite le même état avec une probabilité conditionnelle de 100%, soit une probabilité absolue p_i

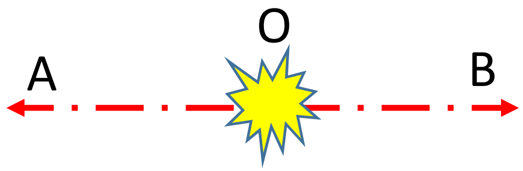


B mesure “φ_i” avec une probabilité de p_i ; A mesure ensuite le même état avec une probabilité conditionnelle de 100%, soit une probabilité absolue p_i

Les deux mesures sont compatibles et peuvent donc être considérées comme “simultanées”.

Mesure “simultanée” de DEUX spins

- ✓ On considère 2 spins issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos :

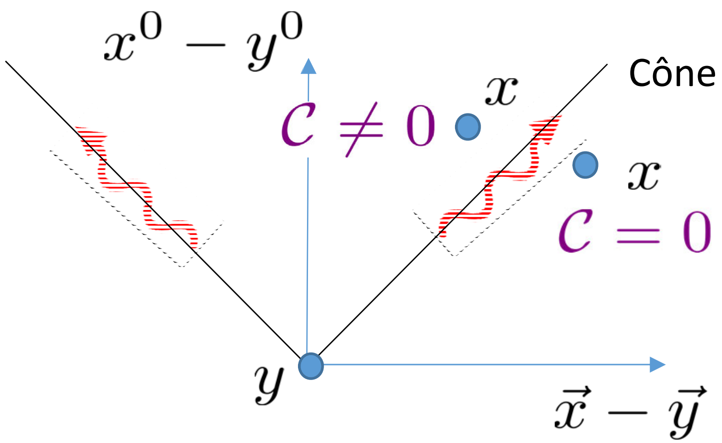


- ✓ Deux mesures effectuées en des points A et B très éloignés peuvent elles être considérées comme compatibles / indépendantes ?
- ✓ La TQC à la rescousse : $\hat{\phi}(\vec{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$

$$\hat{\phi}(\underbrace{\vec{x},t}_{x}) = \hbar c \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t} \right)$$

$$\omega = \frac{E_{\vec{k}}}{\hbar}$$

$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \mathcal{C}(x-y)$ vu l’invariance par translation

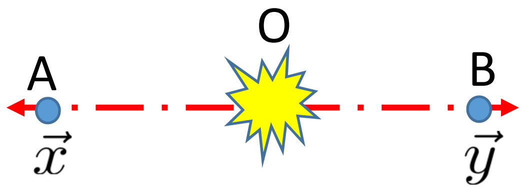


En dehors du cône de lumière, les deux champs commutent => les observables associées sont compatibles !

$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = 0$ si $\|\vec{x} - \vec{y}\| > c|x^0 - y^0|$

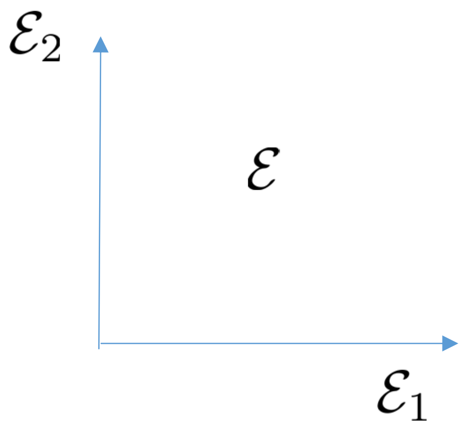
Mesure “simultanée” de DEUX spins

- ✓ On considère 2 spins issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos :



- ✓ Si les mesures sont effectuées à $t_A \approx t_B$, alors on a bien $[\hat{A}(\vec{x}), \hat{B}(\vec{y})] = 0$
- ✓ Mais comment décrit-on *mathématiquement* le double spin ? Plus généralement, combinaison de deux espace vectoriels $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ $\rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$
- ✓ On définit une base dans un espace vectoriel « augmenté » $\mathcal{E}$ de dimension

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{E}_1) \times \dim(\mathcal{E}_2)$$



Soit $\{|\phi_n^{(1)}\rangle, n = 1, \dots \dim(\mathcal{E}_1)\}$, une base de $\mathcal{E}_1$

$\{|\phi_p^{(2)}\rangle, p = 1, \dots \dim(\mathcal{E}_2)\}$ $\mathcal{E}_2$

une base de $\mathcal{E}$ est définie comme

$$\{|\phi_n^{(1)}\rangle \otimes |\phi_p^{(2)}\rangle, n = 1, \dots \dim(\mathcal{E}_1), p = 1, \dots \dim(\mathcal{E}_2)\}$$

Produit tensoriel

$$\boxed{\forall |\psi\rangle \in \mathcal{E}, |\psi\rangle = \sum_{n,p} c_{n,p}^{\psi} |\phi_n^{(1)}\rangle \otimes |\phi_p^{(2)}\rangle}$$

$$\forall |\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{E}, \langle\chi|\psi\rangle = \sum_{n,p} (c_{n,p}^{\chi})^{\star} c_{n,p}^{\psi}$$

Mesure “simultanée” de DEUX spins

✓ Exemple pour 2 spin ½ :

Spin part 1

Spin part 2

$$\left.\begin{array}{l} |+_{\vec{z}}\rangle \otimes |+_{\vec{z}}\rangle \to |++\rangle \\ |+_{\vec{z}}\rangle \otimes |-_{\vec{z}}\rangle \to |+-\rangle \\ |-_{\vec{z}}\rangle \otimes |+_{\vec{z}}\rangle \to |-+\rangle \\ |-_{\vec{z}}\rangle \otimes |-_{\vec{z}}\rangle \to |--\rangle \end{array}\right\} \text{Base à 4 états}$$

Tout état « spin 1 – spin 2 » peut s’écrire sous la forme

$$|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_{++} \\ \psi_{+-} \\ \psi_{-+} \\ \psi_{--} \end{pmatrix}$$

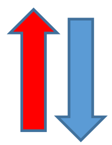
Composante selon $|++\rangle$

Composante selon $|+-\rangle$

⋮

✓ Une combinaison particulière : $|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spin total = 0



Alignements opposés

✓ Mais aussi, combinaison de 2(3) dimensions spatiales -> fonction d’onde 2D, 3D, des fonctions d’ondes de 2, 3,… particules, de l’espace et du spin,…

Mesure “simultanée” de DEUX spins

Les opérateurs (et mesures) dans l’espace $\mathcal{E}$

- ✓ Soit $\hat{A}$ agissant dans $\mathcal{E}_1$ et $\hat{B}$ agissant dans $\mathcal{E}_2$. On définit l’opérateur $\hat{A} \otimes \hat{B}$ agissant dans $\mathcal{E}$ comme

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle := (\hat{A}|\alpha\rangle) \otimes (\hat{B}|\beta\rangle)$$

- ✓ Assez trivialement, on peut construire des opérateurs agissant dans $\mathcal{E}$ mais uniquement sur le sous-espace $\mathcal{E}_1$ (ou $\mathcal{E}_2$) comme :

$$\hat{A}_{\mathcal{E}} := \hat{A} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{E}_2} \quad \text{et} \quad \hat{B}_{\mathcal{E}} := \mathbb{I}_{\mathcal{E}_1} \otimes \hat{B}$$

(lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté sur l’espace dans lequel les opérateurs agissent, on oublie l’indice $\mathcal{E}$)

- ✓ Deux opérateurs agissant dans des sous-espaces dissociés commutent donc par construction :

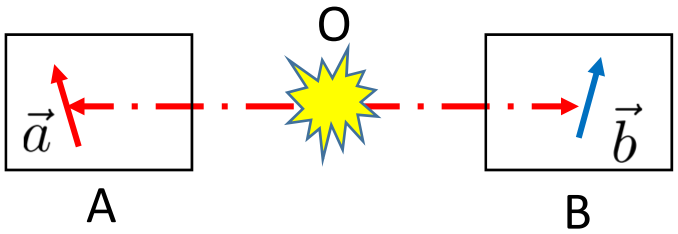
$$[\hat{A}_{\mathcal{E}}, \hat{B}_{\mathcal{E}}] = 0$$

On peut donc effectuer des mesures indépendantes sur chacun des sous-espace (spins) sans affecter l’autre (i.e. réduire son état quantique)

Mesure “simultanée” de DEUX spins

Mise en pratique (expérience 1)

✓ On considère 2 particules de spin 1/2 issues de la désintégration d'une particule et émises dos à dos … dans un état $|++\rangle$



✓ On suppose que A mesure l'orientation du spin de la particule 1 selon $\vec{a}$ et B mesure l'orientation du spin de la particule 2 selon $\vec{b}$. Rédigeons la « table de partition » de cette mesure duale en commençant pas A:

$$|++\rangle \xrightarrow{\text{prob} = \cos^2\frac{\theta_a}{2}} |+_{\vec{a}}+\rangle \xrightarrow{\text{prob cond} = \cos^2\frac{\theta_b}{2}} |+_{\vec{a}}+_{\vec{b}}\rangle \qquad \text{prob} = \cos^2\frac{\theta_a}{2}\,\cos^2\frac{\theta_b}{2}$$

$$|+_{\vec{a}}+\rangle \xrightarrow{\text{prob cond} = \sin^2\frac{\theta_b}{2}} |+_{\vec{a}}-_{\vec{b}}\rangle \qquad \text{prob} = \cos^2\frac{\theta_a}{2}\,\sin^2\frac{\theta_b}{2}$$

$$|++\rangle \xrightarrow{\text{prob} = \sin^2\frac{\theta_a}{2}} |-_{\vec{a}}+\rangle \xrightarrow{\text{prob cond} = \cos^2\frac{\theta_b}{2}} |-_{\vec{a}}+_{\vec{b}}\rangle \qquad \text{prob} = \sin^2\frac{\theta_a}{2}\,\cos^2\frac{\theta_b}{2}$$

$$|-_{\vec{a}}+\rangle \xrightarrow{\text{prob cond} = \sin^2\frac{\theta_b}{2}} |-_{\vec{a}}-_{\vec{b}}\rangle \qquad \text{prob} = \sin^2\frac{\theta_a}{2}\,\sin^2\frac{\theta_b}{2}$$

Mesure “simultanée” de DEUX spins

<u>Moyennes et corrélations</u>

✓ Probabilités totales :

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{prob}(S_{\vec a}=+)&=\cos^2\tfrac{\theta_a}{2}\\ \mathrm{prob}(S_{\vec a}=-)&=\sin^2\tfrac{\theta_a}{2}\end{aligned}\right\}\bar S_{\vec a}=\frac{\hbar}{2}\cos\theta_a$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{prob}(S_{\vec b}=+)&=\cos^2\tfrac{\theta_a}{2}\cos^2\tfrac{\theta_b}{2}+\sin^2\tfrac{\theta_a}{2}\cos^2\tfrac{\theta_b}{2}=\cos^2\tfrac{\theta_b}{2}\\ \mathrm{prob}(S_{\vec b}=-)&=\cos^2\tfrac{\theta_a}{2}\sin^2\tfrac{\theta_b}{2}+\sin^2\tfrac{\theta_a}{2}\sin^2\tfrac{\theta_b}{2}=\sin^2\tfrac{\theta_b}{2}\end{aligned}\right\}\bar S_{\vec b}=\frac{\hbar}{2}\cos\theta_b$$

$$\boxed{\mathrm{prob}(S_{\vec a},S_{\vec b})=\mathrm{prob}(S_{\vec a})\times\mathrm{prob}(S_{\vec b})}$$

Événements indépendants

✓ Corrélations :

$$E(S_{\vec a},S_{\vec b})=\sum_{S_{\vec a},S_{\vec b}}\underbrace{\mathrm{prob}(S_{\vec a},S_{\vec b})}_{=\mathrm{prob}(S_{\vec a})\times\mathrm{prob}(S_{\vec b})}\left(S_{\vec a}-\bar S_{\vec a}\right)\left(S_{\vec b}-\bar S_{\vec b}\right)$$

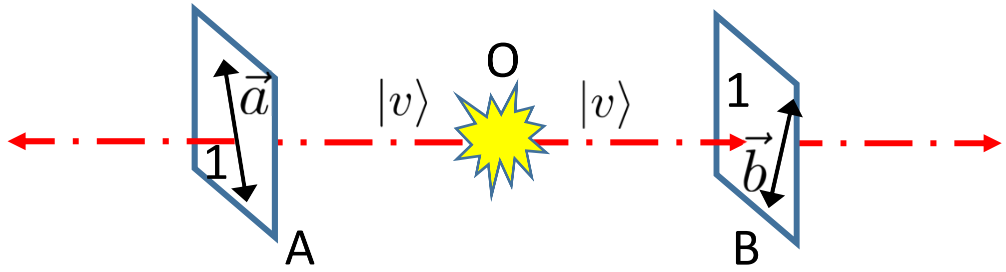
$$=\underbrace{\left[\sum_{S_{\vec a}}\mathrm{prob}(S_{\vec a})\left(S_{\vec a}-\bar S_{\vec a}\right)\right]}_{0}\times\underbrace{\left[\sum_{S_{\vec b}}\mathrm{prob}(S_{\vec b})\left(S_{\vec b}-\bar S_{\vec b}\right)\right]}_{0}=0$$

Aucune corrélation… tout est conforme à notre intuition physique

Mesure “simultanée” de DEUX spins

<u>Mise en pratique (expérience 2)</u>

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état $|vv\rangle$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$. Rédigeons la « table de partition » de cette mesure duale en commençant pas A:

$|vv\rangle$

$\xrightarrow{\text{prob} = \cos^2\theta_a}$ $|+_{\vec{a}}\,+\rangle$

- $\xrightarrow{\text{prob cond} = \cos^2\theta_b}$ $|+_{\vec{a}}\,+_{\vec{b}}\rangle$ $\quad \text{prob} = \cos^2\theta_a\,\cos^2\theta_b$
- $\xrightarrow{\text{prob cond} = \sin^2\theta_b}$ $|+_{\vec{a}}\,-_{\vec{b}}\rangle$ $\quad \text{prob} = \cos^2\theta_a\,\sin^2\theta_b$

$\xrightarrow{\text{prob} = \sin^2\theta_a}$ $|-_{\vec{a}}\,+\rangle$

- $\xrightarrow{\text{prob cond} = \cos^2\theta_b}$ $|-_{\vec{a}}\,+_{\vec{b}}\rangle$ $\quad \text{prob} = \sin^2\theta_a\,\cos^2\theta_b$
- $\xrightarrow{\text{prob cond} = \sin^2\theta_b}$ $|-_{\vec{a}}\,-_{\vec{b}}\rangle$ $\quad \text{prob} = \sin^2\theta_a\,\sin^2\theta_b$

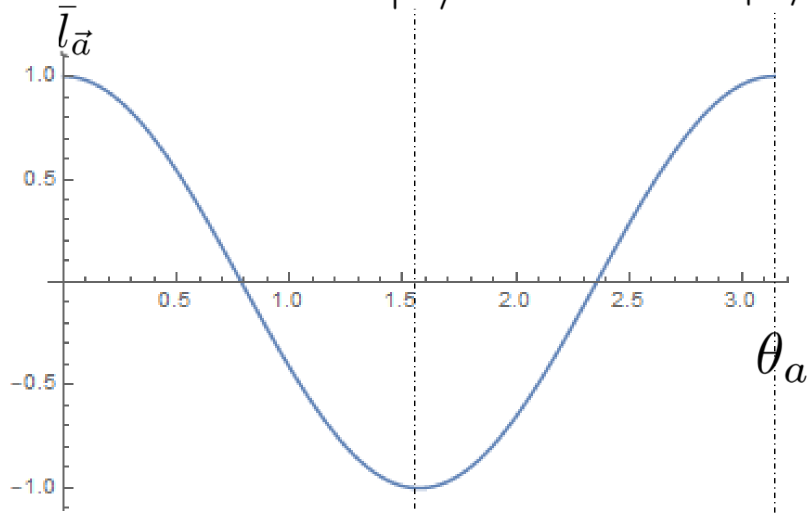
Mesure "simultanée" de DEUX spins

<u>Moyennes et corrélations</u> $l_{\vec{a}} \equiv$ Polarisation linéaire selon $\vec{a}$

ne pas confondre avec moment angulaire

✓ Probabilités totales :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +) = \cos^2\theta_a \\ \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -) = \sin^2\theta_a \end{array}\right\} \bar{l}_{\vec{a}} = \cos 2\theta_a$$



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{prob}(l_{\vec{b}} = +) = \cos^2\theta_a \cos^2\theta_b + \sin^2\theta_a \cos^2\theta_b = \cos^2\theta_b \\ \mathrm{prob}(l_{\vec{b}} = -) = \cos^2\theta_a \sin^2\theta_b + \sin^2\theta_a \sin^2\theta_b = \sin^2\theta_b \end{array}\right\} \bar{l}_{\vec{b}} = \cos 2\theta_b$$

$$\boxed{\mathrm{prob}(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) = \mathrm{prob}(l_{\vec{a}}) \times \mathrm{prob}(l_{\vec{b}})}$$

Événements indépendants

✓ Corrélation: à nouveau nulle

Quoi de plus normal ?....

Les Etats *intriqués*

Définition

- ✓ Il s'agit d'un état de $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ qu'on ne peut pas écrire sous la forme factorisée $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ où $|a\rangle \in \mathcal{E}_1$ et $|b\rangle \in \mathcal{E}_2$
- ✓ Exemple: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$
- ✓ Contre-exemple: $\frac{1}{2}\left(|vv\rangle + |hh\rangle + |hv\rangle + |vh\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|v\rangle + |h\rangle\right) \otimes \left(|v\rangle + |h\rangle\right) = |dd\rangle$

Est bien factorisable !

A. $|++\rangle$

B. $|+-\rangle$

C. $(|++\rangle + |+-\rangle)/\sqrt{2}$

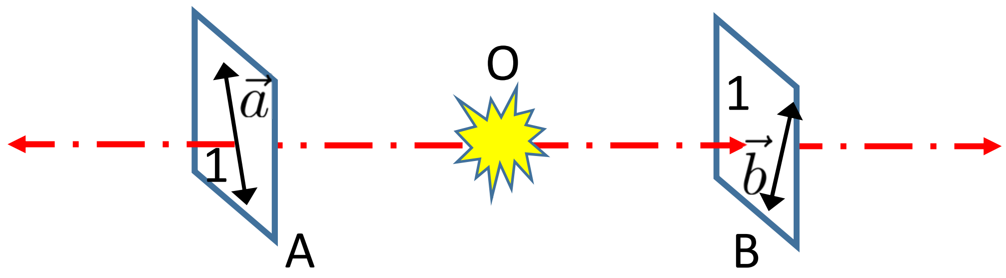
D. $(|++\rangle + |--\rangle)/\sqrt{2}$

E. $(|+-\rangle + |-+\rangle)/\sqrt{2}$

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

Mise en pratique (expérience 3)

✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$



✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$.

✓ Méthode brutale : états propres correspondant à la mesure :

$$|+_{\vec{a}}+_{\vec{b}}\rangle = (\cos\theta_a|v\rangle + \sin\theta_a|h\rangle)\otimes(\cos\theta_b|v\rangle + \sin\theta_b|h\rangle)$$

$$\langle +_{\vec{a}}+_{\vec{b}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta_a\langle v| + \sin\theta_a\langle h|)\otimes(\cos\theta_b\langle v| + \sin\theta_b\langle h|)\left(|v\rangle\otimes|v\rangle + |h\rangle\otimes|h\rangle\right)$$

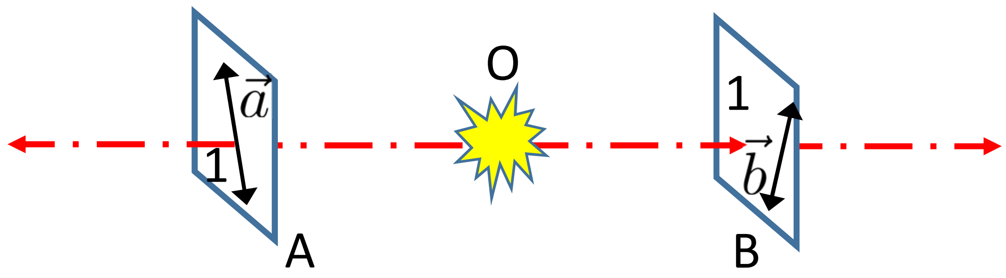
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta_a\cos\theta_b + \sin\theta_a\sin\theta_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta_a-\theta_b)$$

$$\text{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a-\theta_b)$$

Mesure "simultanée" de 2 spins INTRIQUES

Mise en pratique (expérience 3)

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d'une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|vv\rangle + |hh\rangle)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$.

- ✓ Méthode brutale : états propres correspondant à la mesure :

$$|+_{\vec{a}} -_{\vec{b}}\rangle = (\cos\theta_a|v\rangle + \sin\theta_a|h\rangle) \otimes (-\sin\theta_b|v\rangle + \cos\theta_b|h\rangle)$$

$$\langle +_{\vec{a}} -_{\vec{b}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta_a\langle v| + \sin\theta_a\langle h|)\otimes(-\sin\theta_b\langle v| + \cos\theta_b\langle h|)\,(|v\rangle\otimes|v\rangle + |h\rangle\otimes|h\rangle)$$

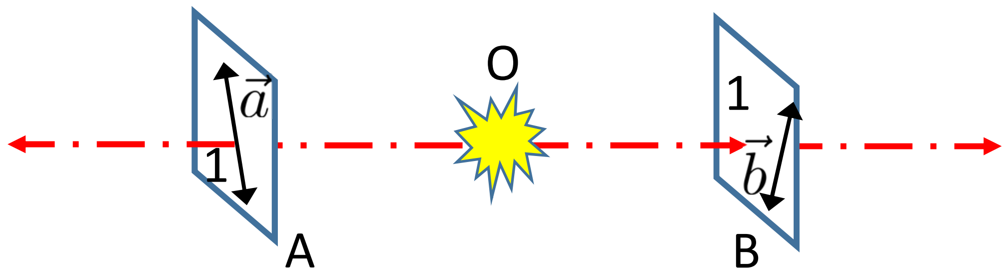
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta_a\sin\theta_b + \sin\theta_a\cos\theta_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta_a - \theta_b)$$

$$\text{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

Mise en pratique (expérience 3)

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|vv\rangle + |hh\rangle)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$.

- ✓ Méthode brutale : états propres correspondant à la mesure :

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$
$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +) = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\forall \vec{a}\ !!!$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$
$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -) = \frac{1}{2}$$

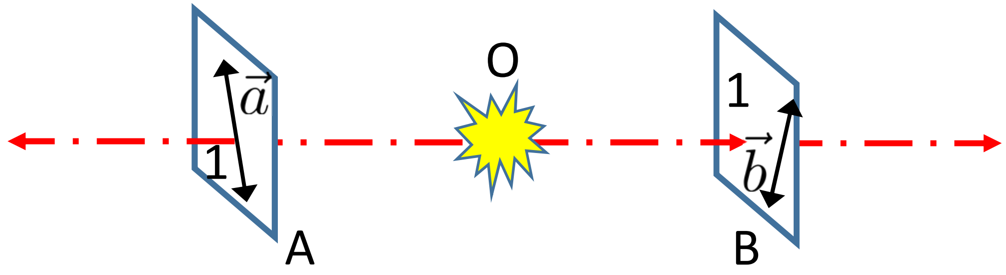
Just do it !

État non polarisé

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

Mise en pratique (expérience 3)

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|vv\rangle + |hh\rangle)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$.

- ✓ Méthode brutale : états propres correspondant à la mesure :

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

Just do it !

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}$$

$\forall \vec{b}$!!!

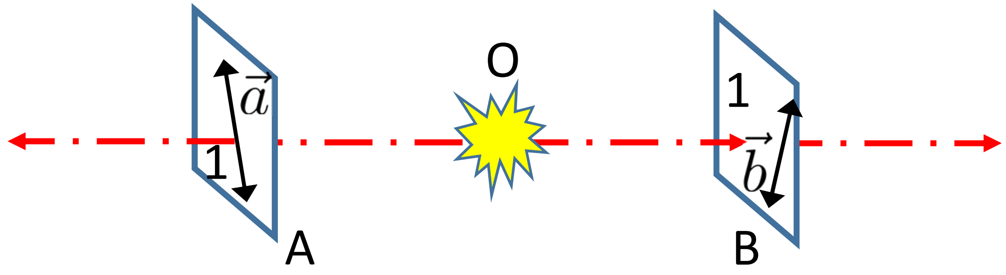
$$\mathrm{prob}(l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}$$

État non polarisé

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

Mise en pratique (expérience 3)

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|vv\rangle + |hh\rangle)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$. ➡ $\bar{l}_{\vec{a}} = \bar{l}_{\vec{b}} = 0$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = +) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

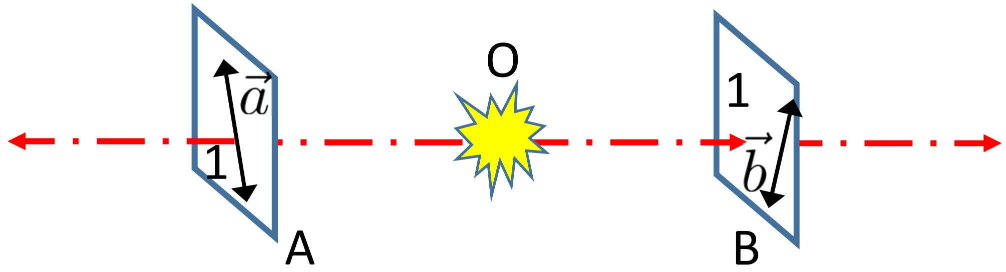
$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = -) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

- ✓ Corrélations ?

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

<u>Mise en pratique (expérience 3)</u>

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$. ➡ $\bar{l}_{\vec{a}} = \bar{l}_{\vec{b}} = 0$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = +) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = -) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

- ✓ Corrélations ?

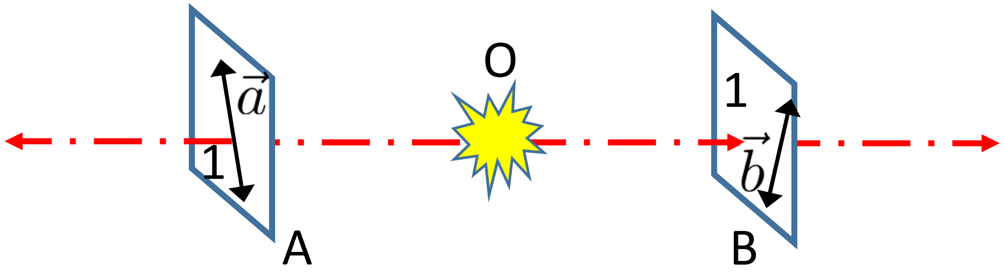
0

$$E(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) = \sum_{l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}} \mathrm{prob}(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) \left(l_{\vec{a}} - \bar{l}_{\vec{a}}\right) \left(l_{\vec{b}} - \bar{l}_{\vec{b}}\right)$$

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

<u>Mise en pratique (expérience 3)</u>

- ✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$



- ✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$. ➡ $\bar{l}_{\vec{a}} = \bar{l}_{\vec{b}} = 0$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = +) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

$$\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b) \qquad \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = -, l_{\vec{b}} = -) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b)$$

- ✓ Corrélations ?

0

$$E(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) = \sum_{l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}} \mathrm{prob}(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}})\left(l_{\vec{a}} - \bar{l}_{\vec{a}}\right)\left(l_{\vec{b}} - \bar{l}_{\vec{b}}\right)$$

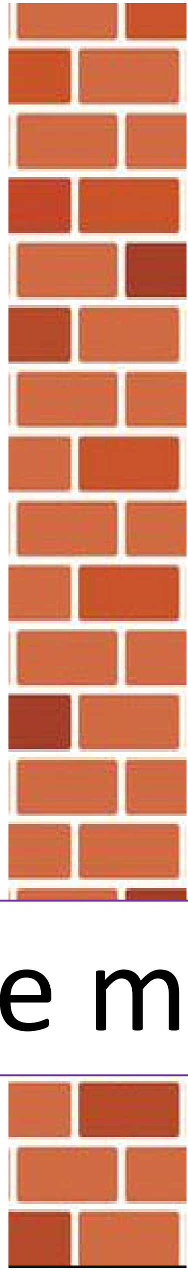
$$= 2 \times \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_a - \theta_b) - 2 \times \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_a - \theta_b) = \cos\left(2(\theta_a - \theta_b)\right)$$

Corrélations (inattendues !)

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

<u>Le tour du siècle !</u>

C’est un as de cœur !



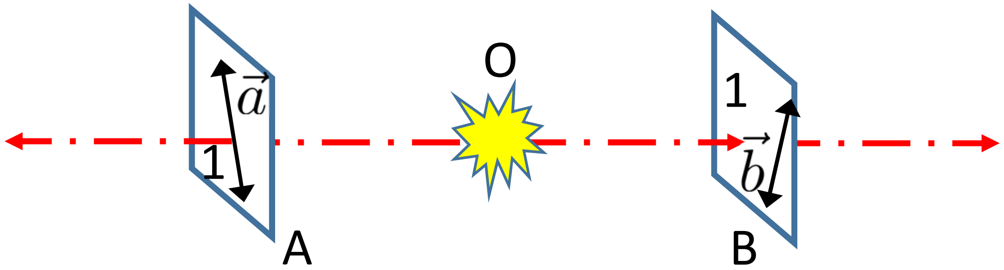
C’est un as de cœur !

Au même moment !!!

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

<u>Mise en pratique (expérience 3)</u>

✓ On considère 2 photons issus de la désintégration d’une particule et émis dos à dos … dans un état *intriqué* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$



✓ On suppose que A mesure la polarisation du photon #1 selon $\vec{a}$ et B mesure la polarisation du photon #2 selon $\vec{b}$.

✓ <u>Méthode plus physique</u> : (**A. Aspect**) deux mesures successives, en débutant par

A: L’opérateur de mesure de A (seulement) s’écrit $\hat{l}_{\vec{a}} \otimes \mathbb{I}_2$ Pas d’action de B

Si $l_{\vec{a}} = +$ est mesurée, l’état résultant est $\hat{P}(l_{\vec{a}} = +)|\psi\rangle = \left(|+_{\vec{a}}\rangle\langle +_{\vec{a}}| \otimes \mathbb{I}_2\right)|\psi\rangle$

Normalisé à l’unité

Probabilité de mesure : $\mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +) = \sum_{l_{\vec{b}}} \left|\langle +_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}|\psi\rangle\right|^2$

correspond à la non-mesure par B.

Mesure "simultanée" de 2 spins INTRIQUES

Calcul concret:

✓ État réduit:
$$
\begin{aligned}
|\psi_{\text{proj}}\rangle &\propto \hat{P}(l_{\vec{a}} = +)|\psi\rangle \\
&\propto \left(|+_{\vec{a}}\rangle\langle +_{\vec{a}}| \otimes \mathbb{I}_2\right)|\psi\rangle \\
&\propto \frac{|+_{\vec{a}}\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \left[\left(\langle +_{\vec{a}}| \otimes \mathbb{I}_2\right)|vv\rangle + \left(\langle +_{\vec{a}}| \otimes \mathbb{I}_2\right)|hh\rangle\right] \\
&\propto \frac{|+_{\vec{a}}\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \left(\langle +_{\vec{a}}|v\rangle|v\rangle + \langle +_{\vec{a}}|h\rangle|h\rangle\right) \\
&= |+_{\vec{a}}\rangle \otimes \left(\cos\theta_a|v\rangle + \sin\theta_a|h\rangle\right) = |+_{\vec{a}}\rangle \otimes |+_{\vec{a}}\rangle
\end{aligned}
$$

Après la mesure par A, l'état du 2[e] photon se trouve réduit dans le même état !

Du coup, si $\vec{b} = \vec{a}$, B mesurera « + » avec 100% de probabilité

cf $E(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) = \cos\left(2(\theta_a - \theta_b)\right)$

✓ Conclusion similaire pour $|\psi_{\text{proj}}\rangle \propto \hat{P}(l_{\vec{a}} = -)|\psi\rangle$

Magie des états intriqués : équiprobabilité, mais corrélation maximale !

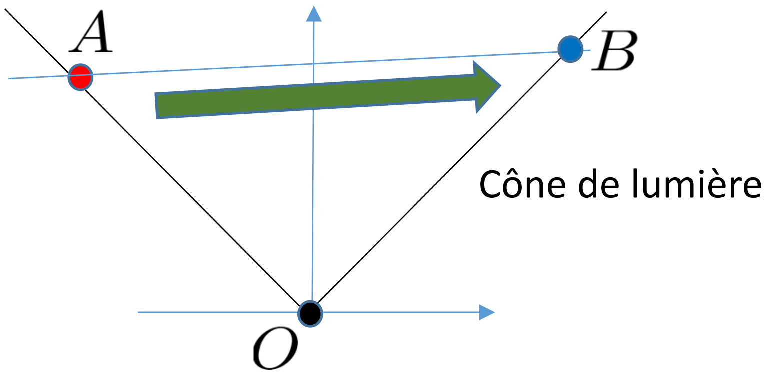
Mais aussi : tout l'intérêt de pouvoir effectuer des mesures « riches » (polarisation suivant des directions quelconques)

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

<u>Comment est-ce possible ?</u>

✓Deux grands paradigmes pour imposer une corrélation entre deux événements distants :

1) De l’information est transmise de A -> B : *Causalité*



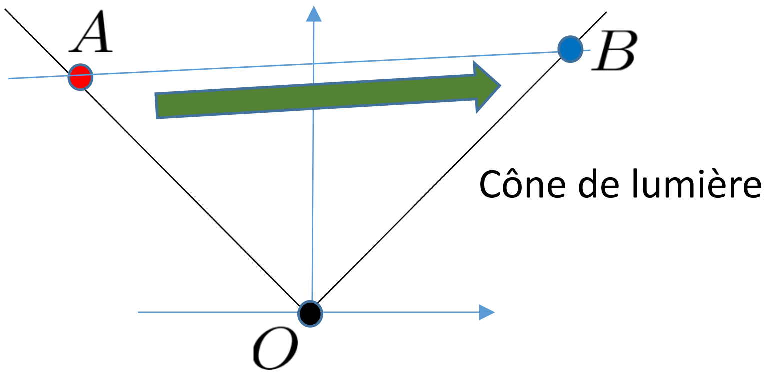
Mais qui dit corrélation ne dit pas nécessairement lien de cause à effet…

Mesure “simultanée” de 2 spins INTRIQUES

Comment est-ce possible ?

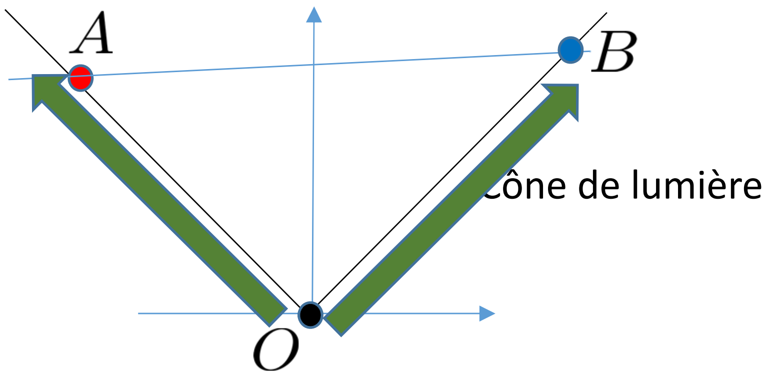
✓Deux grands paradigmes pour imposer une corrélation entre deux événements distants :

1) De l’information est transmise de A -> B : *Causalité*



Mais qui dit corrélation ne dit pas nécessairement lien de cause à effet…

2) Les particules / signaux arrivant en A et B ont été préparé(e)s en O avec une corrélation maximale : mélange statistique, mais pas de « causalité »



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|vv\rangle + |hh\rangle\right)$$

signifierait en fait 50% des cas dans $|vv\rangle$ et 50% des cas dans $|hh\rangle$

L’argument EPR

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

empêche

A la conjonction entre physique, mathématique et philosophie

Une théorie physique ne décrit pas nécessairement toute la réalité objective du monde réel, elle ne permet de s’en faire qu’une idée forcément tronquée.

Différence entre correcte et *complète* ← – – Condition nécessaire : correspondance biunivoque entre un élément de la « réalité » et un état de la théorie mathématico-physique.

<u>Critère (postulat EPR pour « réalité »):</u> si on peut prédire avec certitude une quantité physique mesurée sans perturber le système de quelque manière que ce soit, alors il existe un *élément de réalité* physique associée à la quantité (condition annoncée comme suffisante).

L'argument EPR

<u>Prémisses</u>:

Critère (postulat EPR): annoncé comme Compatible avec la méca Q…

✓Peut sembler en contradiction avec la mesure non prédictible de la méca Q

✓Bien compatible dans le cas d'un état propre d'une observable, par exemple onde plane et quantité de mouvement hyper définie…

Mais on ne peut alors accéder à la valeur de x :

direct measurement. Such a measurement however disturbs the particle and thus alters its state. After the coordinate is determined, the particle will no longer be in the state given by Eq. (2). The usual conclusion from this in quantum mechanics is that *when the momentum of a particle is known, its coordinate has no physical reality.*

Généralisation au cas de 2 observables qui ne commutent pas : $AB \neq BA$

✓ La connaissance de l'une empêche la connaissance de l'autre

✓ En voulant mesurer l'autre, on perturbe l'état du système de sorte qu'on détruise la connaissance de la première.

Soit la mécanique quantique et sa description par une fonction d'onde n'est pas complète (proposition 1)

Xor

Soit deux opérateurs qui décrivent deux quantités physiques non « compatibles » ne peuvent avoir simultanément la même réalité (proposition 2)

(par l'absurde)

L'argument EPR

<u>Prémisses</u>:

Critère (postulat EPR): annoncé comme Compatible avec la méca Q…

✓Peut sembler en contradiction avec la mesure non prédictible de la méca Q

✓Bien compatible dans le cas d'un état propre d'une observable, par exemple onde plane et quantité de mouvement hyper définie…

Mais on ne peut alors accéder à la valeur de x :

direct measurement. Such a measurement however disturbs the particle and thus alters its state. After the coordinate is determined, the particle will no longer be in the state given by Eq. (2). The usual conclusion from this in quantum mechanics is that *when the momentum of a particle is known, its coordinate has no physical reality.*

Généralisation au cas de 2 observables qui ne commutent pas : $AB \neq BA$

- ✓ La connaissance de l'une empêche la connaissance de l'autre
- ✓ En voulant mesurer l'autre, on perturbe l'état du système de sorte qu'on détruise la connaissance de la première.

Soit la mécanique quan description par une f d'onde n'est pas co (proposition 1

1 : pas complète	2 réalité différente pour [A,B]<>0
vrai	faux
faux	vrai

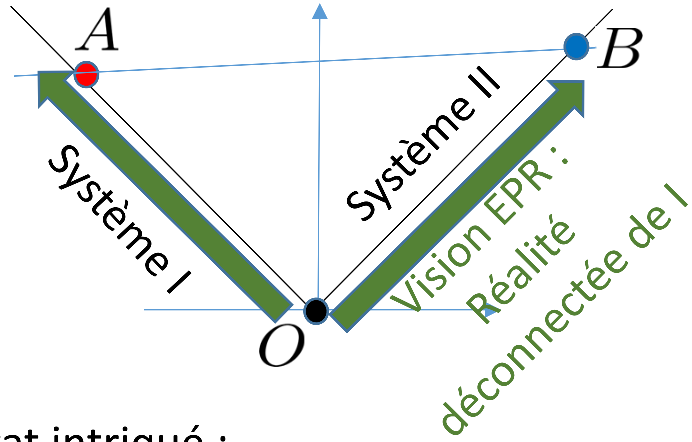
Xor

…érateurs qui décrivent deux …ysiques non « compatibles » …voir simultanément la même …lité (proposition 2)

(par l'absurde)

L'argument EPR

L'argument:



« On the other
hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system."

Pour EPR : évident qu'il ne peut y avoir d'influence « tardive » de I->II

État intriqué :

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1),$$

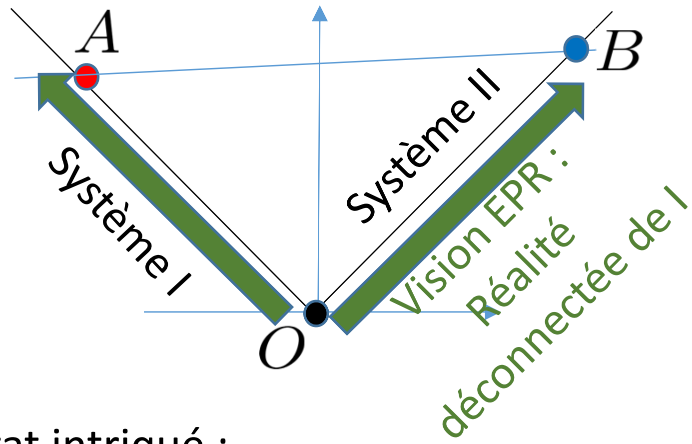
Selon les postulats même de la mécanique quantique, la fonction d'onde du système II correspond à une « réalité physique » unique

Si A mesure le système I dans l'état u_k, alors la mesure de B est prédictible est sera ψ_k dans 100% des cas... Et ce sans perturber le système

En effectuant – par la pensée -- sur le système I des mesures A correspondant à des observables qui ne commutent pas (P et X), EPR argumentent que, via la réduction, les observables P et X sur le système II **peuvent être considérés comme des éléments de réalité alors que ces mesures ne commutent pas** (« Starting then with the assumption that the wave function does give a complete description of the physical reality, we arrived at the conclusion that two physical quantities, with noncommuting operators, can have simultaneous reality. »)

L’argument EPR

<u>L’argument:</u>



« On the other
hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system.”

Pour EPR : évident qu’il ne peut y avoir d’influence « tardive » de I->II

État intriqué :

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1),$$

Selon les postulats même de la mécanique quantique, la fonction d’onde du système II correspond à une « réalité physique » unique

En effectuant – par la pensée -- sur le système I des mesures A correspondant à des observables qui ne commutent pas (P et X), EPR argumentent que, via la réduction, les observables P et X sur le système II **peuvent être considérés comme des éléments de réalité alors que ces mesures ne commutent pas**

<u>Conclusion</u> : En partant de l’hypothèse de la complétude de la mécanique quantique, EPR contredit la proposition 2 qui correspond à leur critère de théorie complète. Ils concluent donc que la mécanique quantique n’est pas complète…

1 : pas complète		2 réalité différente pour [A,B]<>0
vrai	Xor	faux
faux		vrai
faux	$\Rightarrow$	faux

L’argument EPR

Conclusion:

> While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.

Commentaires:

- ✓ En fait, Einstein ne remettait pas en cause le formalisme ni les résultats de la méca Q (pas l’aspect « correcte ») mais juste l’interprétation
- ✓ Ce qui est impressionnant : argument donné en partant du formalisme même de la méca Q.
- ✓ La construction présentée précédemment (avec les spins) suit l’argumentaire d’EPR mais est dû à Bohm (1950)… qui est lui-même à l’origine d’une description à variables cachées / supplémentaires (voir planches « Mesure de spin et variables cachées »).
- ✓ Toutefois, théorème de « no-go » par Von Neumann pour de telles approches… remis ensuite en question par Bell au début des années 60 … qui va de plus transformer ce débat quasi philosophique en question physique car expérience mesurable.

Les inégalités de Bell

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(*Received* 4 *November* 1964)

N.B.: les arguments de Bell étaient formulés pour des particules de spin ½. Nous les reformulons pour le cas des photons

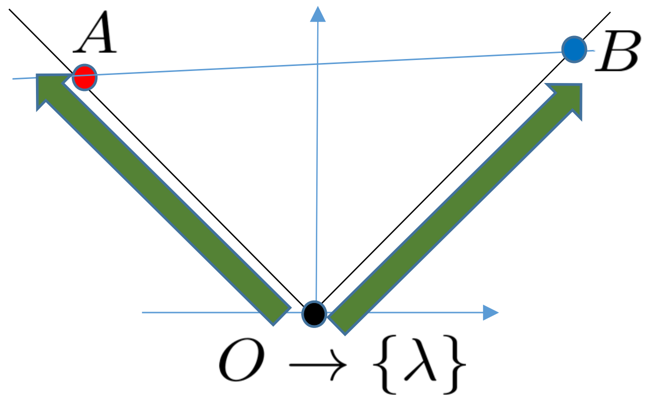
<u>Approche:</u>

✓ État quantique préparé en *O*, avec les *variables complémentaires* {λ}, qui peuvent être au besoin multiples, suivant une distribution statistique ρ(λ)>0, variables « portées » par les deux particules

✓ Observables A et B de type « polarisation », avec une hypothèse forte de *localité*:

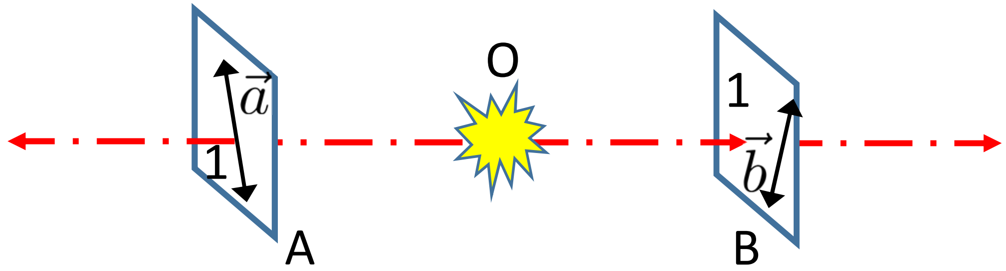
$$\begin{cases} A(\theta_a, \cancel{\theta_b}, \lambda) = \boxed{\pm 1} \\ B(\cancel{\theta_a}, \theta_b, \lambda) = \boxed{\pm 1} \end{cases}$$

Deux seules valeurs observables



Les inégalités de Bell

Les expériences de corrélation γ-γ revues à la mode des variables supplémentaires



- ✓ La probabilité de mesurer $l_{\vec{a}} = +$ s'écrit $\text{prob}(l_{\vec{a}} = +) = \int d\lambda \rho(\lambda) \boxed{\frac{A(\theta_a,\lambda)+1}{2}}$

  =1 pour + et =0 pour -

  $l_{\vec{a}} = -$ " $\text{prob}(l_{\vec{a}} = -) = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{1-A(\theta_a,\lambda)}{2}$

- ✓ L'espérance de $l_{\vec{a}}$ vaut $\bar{l}_{\vec{a}} = \text{prob}(l_{\vec{a}} = +) - \text{prob}(l_{\vec{a}} = -) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(\theta_a, \lambda)$

- ✓ La probabilité de mesurer $l_{\vec{a}} = +$ et $l_{\vec{b}} = +$ vaut

$$\text{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \frac{A(\theta_a,\lambda)+1}{2} \times \frac{B(\theta_b,\lambda)+1}{2}$$

$$\text{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = -) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \frac{A(\theta_a,\lambda)+1}{2} \times \frac{1-B(\theta_b,\lambda)}{2}$$

$$\vdots$$

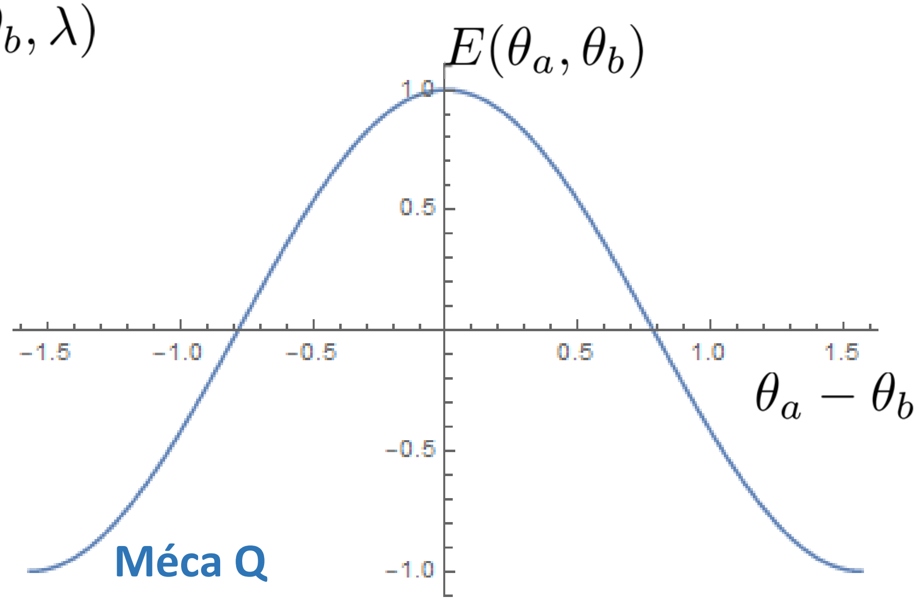
Les inégalités de Bell

- Dans le cas physique de la désintégration d'un état de spin total nul (décrit par les états intriqués en MQ), La distribution de probabilité $\rho(\lambda)$ et les fonctions A et B sont telles que $\bar{l}_{\vec{a}} = \bar{l}_{\vec{b}} = 0$ (mêmes résultats que pour la méca Q).

- La corrélation vaut

$$E(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}) = \sum_{l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}}} \mathrm{prob}(l_{\vec{a}}, l_{\vec{b}})\, l_{\vec{a}}\, l_{\vec{b}}$$
$$= \mathrm{prob}(l_{\vec{a}} = +, l_{\vec{b}} = +) + \mathrm{prob}(-,-) - \mathrm{prob}(+,-) - \mathrm{prob}(-,+)$$
$$\vdots$$
$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(\theta_a, \lambda) \times B(\theta_b, \lambda)$$

- **Est-on en mesure de reproduire le résultat établi dans le cadre de la mécanique quantique** ? Si oui, les deux interprétations peuvent être acceptables…
- Sinon c'est encore plus intéressant…



Les inégalités de Bell

<u>Une propriété générique</u>: (au-delà du modèle évoqué par A. Aspect)

- ✓ Tentons d'approcher le résultat de la mécanique quantique (sans var. sup.)

$$E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\; A(\theta_a, \lambda) \times B(\theta_b, \lambda)$$

- ✓ Puisque $\int d\lambda\, \rho(\lambda) = 1$, la corrélation ne peut égaler 1 en $\theta_b = \theta_a$ que ssi

$$\boxed{B(\theta_a, \lambda) = A(\theta_a, \lambda)}$$

Conséquence de la localité

=> Dès lors $E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\; A(\theta_a, \lambda)\, A(\theta_b, \lambda)$

$$E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta_c) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\; \left(A(\theta_a, \lambda)\, A(\theta_b, \lambda) - A(\theta_a, \lambda)\, A(\theta_c, \lambda)\right)$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda)\; A(\theta_a, \lambda)\, A(\theta_b, \lambda)\, (1 - A(\theta_b, \lambda)\, A(\theta_c, \lambda))$$

$|A(\theta_b, \lambda)|^2 = 1$

$$|E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta_c)| \leq \underbrace{\int d\lambda\, \rho(\lambda)\, (1 - A(\theta_b, \lambda)\, A(\theta_c, \lambda))}_{=1-E(\theta_b, \theta_c)}$$

$$\boxed{E(\theta_b, \theta_c) \leq 1 - |E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta_c)|}$$

Vrai pour tout θ_a

Première inégalité de Bell

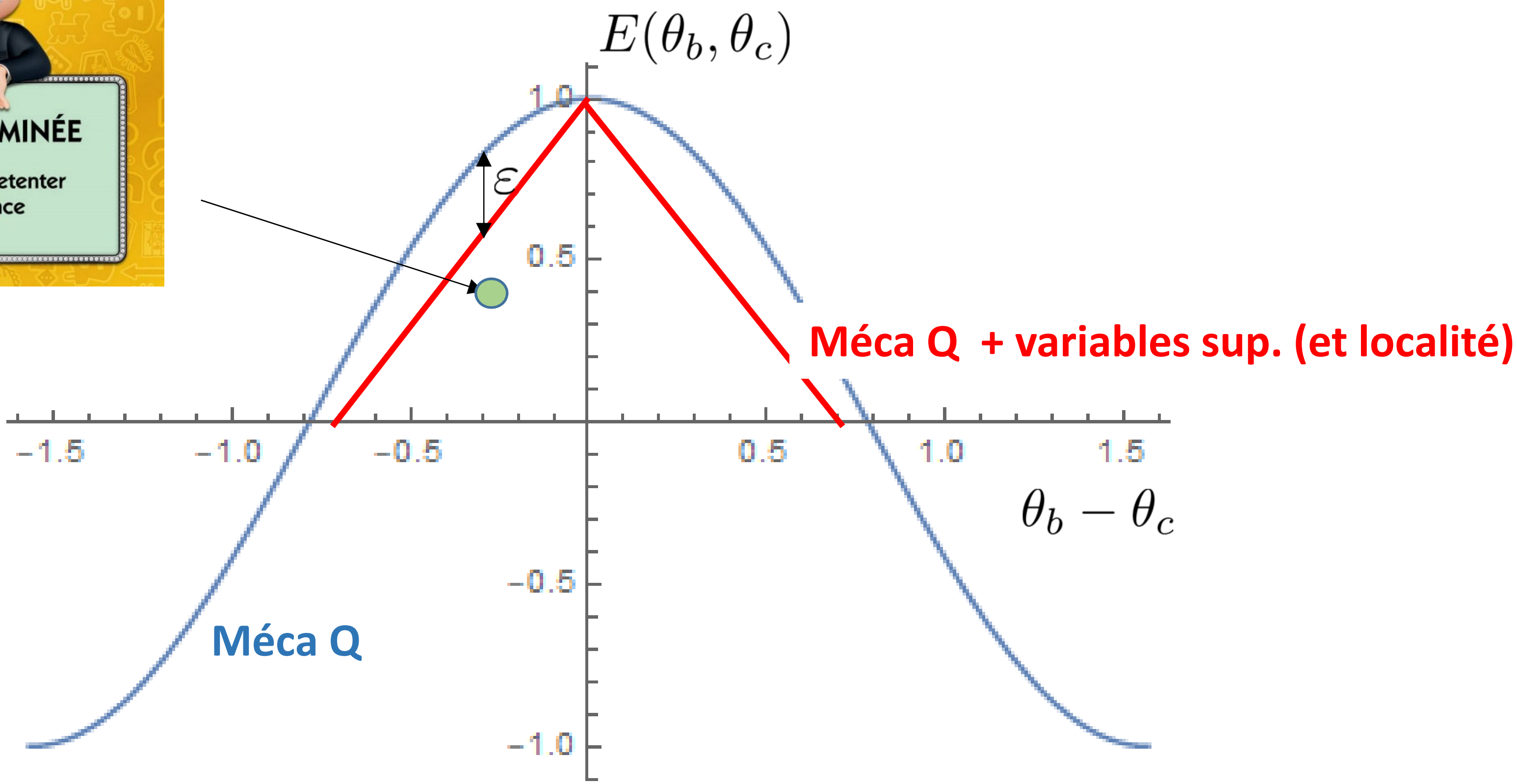
En général : $\propto |\theta_b - \theta_c|$

$E(\theta_b, \theta_c) \leq 1 - \mathrm{cst} \times |\theta_b - \theta_c|$ Ne peut être stationnaire au voisinage de $\theta_c = \theta_b$

Les inégalités de Bell

<u>Une propriété générique</u>: (au-delà du modèle évoqué par A. Aspect)

✓ Tentons d'approcher le résultat de la mécanique quantique (sans var. sup.)

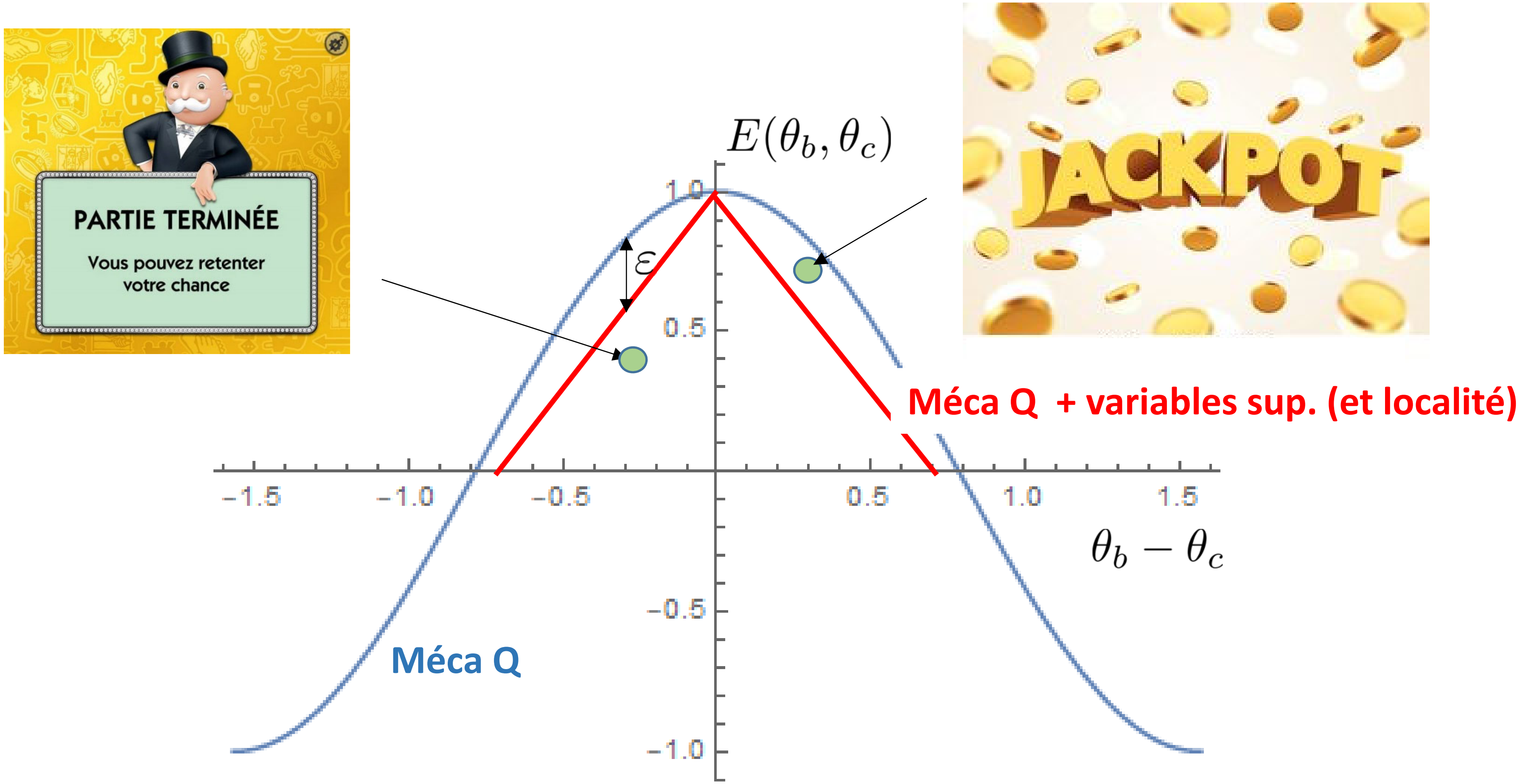


✓ Bell démontre également que la différence ε entre les deux théories ne peut être arbitrairement petite (mais pas facilement exploitable)

Les inégalités de Bell

<u>Une propriété générique</u>: (au-delà du modèle évoqué par A. Aspect)

- ✓ Tentons d'approcher le résultat de la mécanique quantique (sans var. sup.)



- ✓ Bell démontre également que la différence ε entre les deux théories ne peut être arbitrairement petite (mais pas facilement exploitable)

Les inégalités de Bell

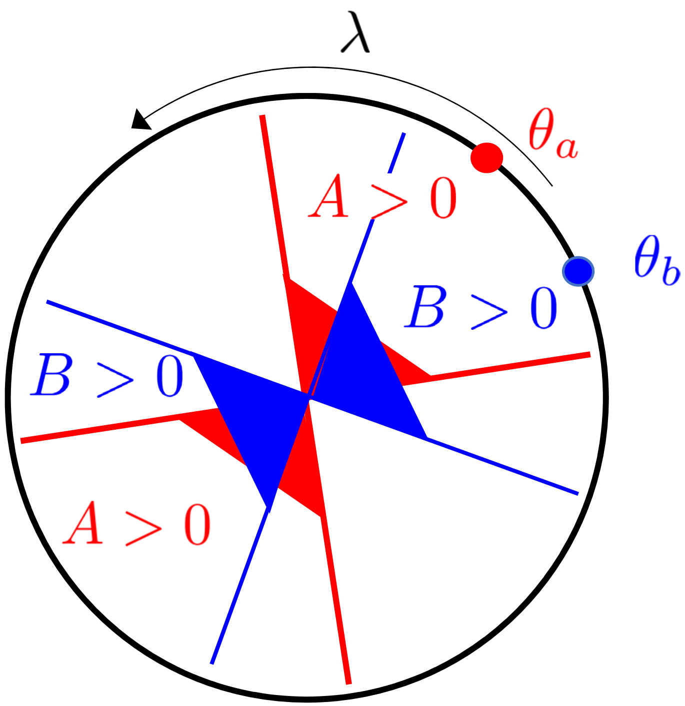
<u>Un modèle spécifique</u>: (évoqué par A. Aspect)

$$E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(\theta_a, \lambda)\, B(\theta_b, \lambda)$$

✓ Prenons $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ pour $\lambda \in [0, 2\pi]$

$$A(\theta_a, \lambda) = \text{signe}\,(\cos 2(\theta_a - \lambda))$$

$$B(\theta_b, \lambda) = \text{signe}\,(\cos 2(\theta_b - \lambda))$$



Les moyennes sur A et B sont (trivialement) nulles séparément

Les inégalités de Bell

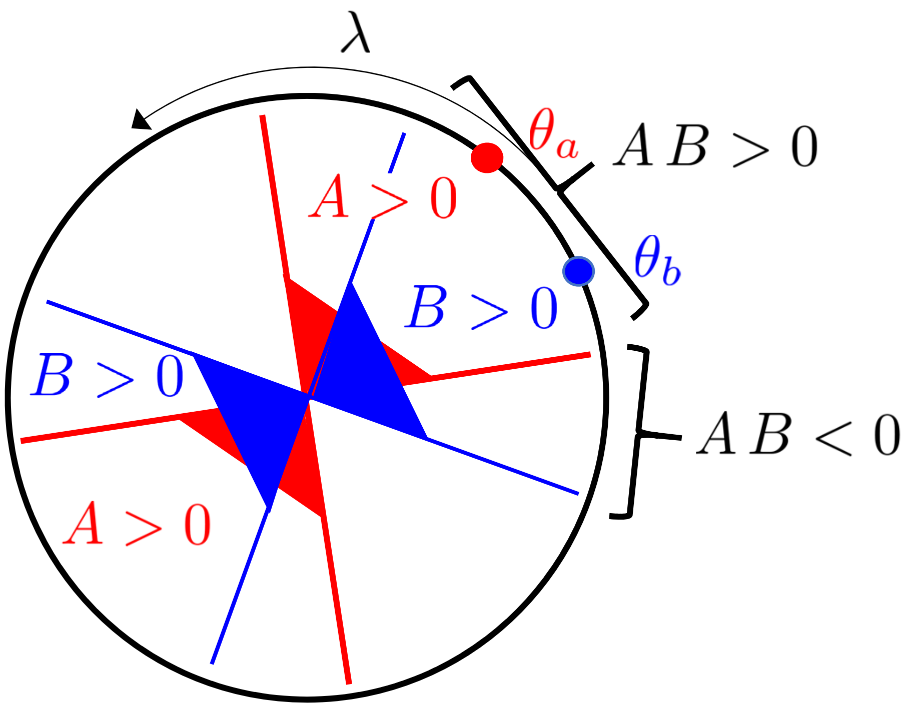
<u>Un modèle spécifique</u>: (évoqué par A. Aspect)

$$E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda \, \rho(\lambda) \; A(\theta_a, \lambda) \, B(\theta_b, \lambda)$$

✓ Prenons $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ pour $\lambda \in [0, 2\pi]$

$$A(\theta_a, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_a - \lambda)\right)$$

$$B(\theta_b, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_b - \lambda)\right)$$



Dans cette configuration de θ_a et θ_b, la corrélation est dominée par les contributions positives => E>0.

La corrélation est simplement égale à la différence entre les recouvrements angulaires des secteurs « AB>0 » et « AB<0 » => évolution linéaire ./. θ_a - θ_b

Les inégalités de Bell

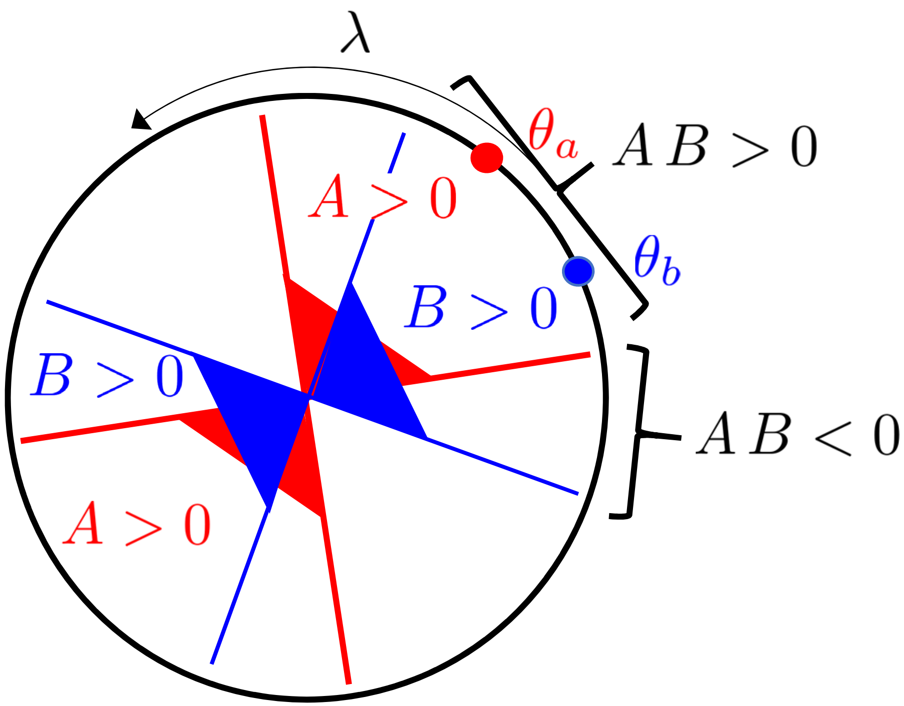
<u>Un modèle spécifique</u>: (évoqué par A. Aspect)

$$E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda \, \rho(\lambda) \; A(\theta_a, \lambda) \, B(\theta_b, \lambda)$$

✓ Prenons $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{pour } \lambda \in [0, 2\pi]$

$$A(\theta_a, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_a - \lambda)\right)$$

$$B(\theta_b, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_b - \lambda)\right)$$



- ✓ $\theta_b = \theta_a$ ou $\theta_b = -\theta_a$ => E = +1
- ✓ $\theta_b = \theta_a$ +/- $\pi/2$ => E = -1
- ✓ $\theta_b = \theta_a$ +/- $\pi/4$ ou $\theta_b = \theta_a$ +/- $3\pi/4$ => E = 0

Les inégalités de Bell

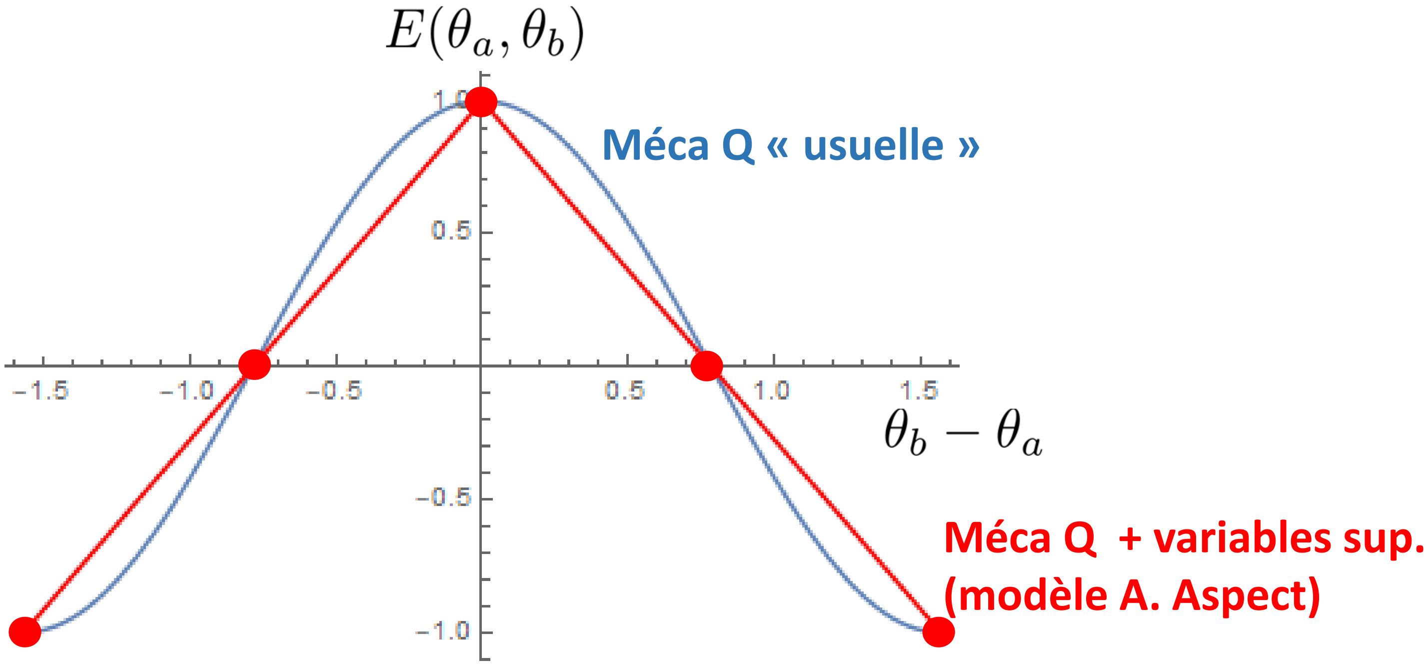
<u>Un modèle spécifique</u>: (évoqué par A. Aspect)

$$E(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(\theta_a, \lambda)\, B(\theta_b, \lambda)$$

✓ Prenons $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{pour } \lambda \in [0, 2\pi]$

$$A(\theta_a, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_a - \lambda)\right)$$

$$B(\theta_b, \lambda) = \text{signe}\left(\cos 2(\theta_b - \lambda)\right)$$



… Mais il n’est pas nécessairement facile de tester cette différence au niveau expérimental

Les inégalités de Bell

<u>Les inégalités (générique)</u>:

- ✓ Le but est d'établir une différence générique et simple à tester expérimentalement entre les prédictions de la méca Q « usuelle » et la méca Q avec variables sup.
- ✓ En fait, généralisation des inégalités proposée par Clauser et al.

PROPOSED EXPERIMENT TO TEST LOCAL HIDDEN-VARIABLE THEORIES*

John F. Clauser†
Department of Physics, Columbia University, New York, New York 10027

and

Michael A. Horne
Department of Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

and

Abner Shimony
Departments of Philosophy and Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

and

Richard A. Holt
Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138
(Received 4 August 1969)

A theorem of Bell, proving that certain predictions of quantum mechanics are inconsistent with the entire family of local hidden-variable theories, is generalized so as to apply to realizable experiments. A proposed extension of the experiment of Kocher and

Les inégalités de Bell

Les inégalités (générique):

- ✓ Bell : $E(\theta_b,\theta_c) \leq 1 - |E(\theta_a,\theta_b) - E(\theta_a,\theta_c)|$ => 3 configurations
- ✓ CHSH : on considère non plus 3 mais bien 2 x 2 = 4 configurations expérimentales, à savoir : $A : \theta_a \quad \text{ou} \quad \theta'_a \qquad \otimes \qquad B : \theta_b \quad \text{ou} \quad \theta'_b$
- ✓ On considère la quantité

$$s = A(\theta_a,\lambda)B(\theta_b,\lambda) - A(\theta_a,\lambda)B(\theta'_b,\lambda) + A(\theta'_a,\lambda)B(\theta_b,\lambda) + A(\theta'_a,\lambda)B(\theta'_b,\lambda)$$

Du point de vue de l'expérience, il est un peu abusif de considérer cette somme pour une valeur « fixée » de λ, puisqu'on ne tire pas les mêmes valeurs de λ dans chaque expérience, mais tout ceci est parfaitement justifié au sens de la moyenne (à venir)

- ✓ On réécrit : $s = A(\theta_a,\lambda)\left[B(\theta_b,\lambda) - B(\theta'_b,\lambda)\right] + A(\theta'_a,\lambda)\left[B(\theta_b,\lambda) + B(\theta'_b,\lambda)\right]$
- ✓ On rappelle que A et B valent $\pm$ 1. On a alors

$$B(\theta_b,\lambda) - B(\theta'_b,\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad |B(\theta_b,\lambda) + B(\theta'_b,\lambda)| = 2$$

ou (exclusif)

$$B(\theta_b,\lambda) + B(\theta'_b,\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad |B(\theta_b,\lambda) - B(\theta'_b,\lambda)| = 2$$

$$s = \pm 1 \times 0 \pm 1 \times \pm 2 = \pm 2$$

Les inégalités de Bell

Les inégalités (générique):

- ✓ En effectuant la moyenne statistique : $-2 \leq S := \int d\lambda \, \rho(\lambda) \, s \leq 2$ …

Mais aussi : $S = E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta'_b) + E(\theta'_a, \theta_b) + E(\theta'_a, \theta'_b)$

$\Downarrow$

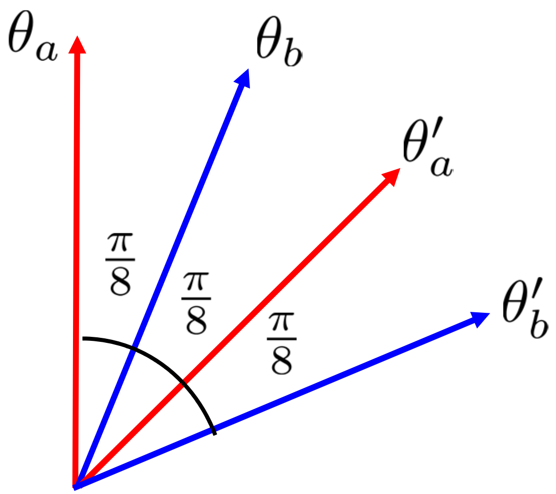
Inégalité (généralisée) de Bell :

$$\boxed{-2 \leq E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta'_b) + E(\theta'_a, \theta_b) + E(\theta'_a, \theta'_b) \leq 2}$$

Les inégalités de Bell

Les inégalités (générique)… violées par la mécanique quantique:

✓ Si on considère par exemple la configuration suivante :



Rappel:

$$E(\theta_a, \theta_b) = \cos\left(2(\theta_a - \theta_b)\right)$$

$$S = E(\theta_a, \theta_b) - E(\theta_a, \theta'_b) + E(\theta'_a, \theta_b) + E(\theta'_a, \theta'_b)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S = 2\sqrt{2} > 2}$$

✓ Les inégalités Bell peuvent donc prêter à une vérification **expérimentale** !!!

Les inégalités de Bell

Remarques:

✓ Si on n'exige pas la localité …

$$s = A(\theta_a, \theta_b, \lambda)B(\theta_a, \theta_b, \lambda) - A(\theta_a, \theta_b', \lambda)B(\theta_a, \theta_b', \lambda) + \cdots$$

$$\not\Downarrow$$

$$s = A(\theta_a, \lambda)\left[B(\theta_b, \lambda) - B(\theta_b', \lambda)\right] + \cdots$$

… et le résultat ne s'applique alors pas => importance de l'hypothèse de localité

✓ !!! Bell ne dénigre pas l'existence de variables supplémentaires qui seraient compatibles avec les résultats de la méca Q… mais il affirme (exemple à l'appui) que ces théories devraient souffrir des mêmes spécificités / lacunes que la mécanique quantique vis-à-vis de la **localité** !

VI. Conclusion

In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote. Moreover, the signal involved must propagate instantaneously, so that such a theory could not be Lorentz invariant.

Of course, the situation is different if the quantum mechanical predictions are of limited validity.

La décohérence (modèle simple)

Modèle simple…:

- ✓ On considère un spin plongé dans un champ magnétique aléatoire
- ✓ Le Hamiltonien s'écrit : $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t) = \cdots = \vec{f}(t) \cdot \vec{\sigma}$

« Force » aléatoire locale en temps

- ✓ Equation de Schrödinger *stochastique* : $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(t)\psi$
- ✓ Solution formelle : $\psi(t, \{\vec{f}\}) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \, \hat{H}(t')\right) \psi(0)$

Produit ordonné en temps

- ✓ Deux difficultés :
  - Calcul concret pour une séquence de forces données.
  - Comment se faire une vision "moyenne"

… solution pas si simple !

Deux moyennes : stochastique et quantique

La décohérence (modèle simple)

Opérateur densité:

- ✓ On définit l'opérateur $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$
- ✓ L'intérêt de cet opérateur est de pouvoir encoder plus simplement les moyennes

Moyenne quantique

$$\langle\bar{O}\rangle = \langle\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle\rangle = \langle\mathrm{tr}(\hat{O}\hat{\rho})\rangle = \mathrm{tr}(\hat{O}\langle\hat{\rho}\rangle)$$

Moyenne sur les forces stochastiques

- ✓ On peut donc gérer l'aspect "moyenne sur les forces stochastiques" en considérant l'opérateur densité "moyenné" $\langle\hat{\rho}\rangle$ et son évolution
- ✓ Evolution de $\hat{\rho}$:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{i}{\hbar}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{H} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho} + \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}\hat{H} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \mathcal{N}(\hat{\rho})}$$

Equation de Von Neumann

La décohérence (modèle simple)

<u>Opérateur densité</u>:

Densité de spin up

✓ Pour le spin :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\star & \psi_\downarrow^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_\uparrow} & \psi_\uparrow \psi_\downarrow^\star \\ \psi_\uparrow^\star \psi_\downarrow & \boxed{\rho_\downarrow} \end{pmatrix}$$

Densité de spin down

La décohérence (modèle simple)

<u>Opérateur densité</u>:

✓ Pour le spin :

Terme d'interférence

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\star & \psi_\downarrow^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_\uparrow & \boxed{\psi_\uparrow\psi_\downarrow^\star} \\ \boxed{\psi_\uparrow^\star\psi_\downarrow} & \rho_\downarrow \end{pmatrix}$$

Terme d'interférence

$$\langle\hat{\rho}\rangle = \begin{pmatrix} \langle\rho_\uparrow\rangle & \langle\psi_\uparrow\psi_\downarrow^\star\rangle \\ \boxed{\langle\psi_\uparrow^\star\psi_\downarrow\rangle} & \langle\rho_\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\hat{\rho}\rangle_\uparrow & \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow} \\ \langle\hat{\rho}\rangle_{\downarrow\uparrow} & \langle\hat{\rho}\rangle_\downarrow \end{pmatrix}$$

où tous les termes sont considérés comme des moyennes stochastiques

Plus factorisable

4 composantes

Equation dynamique pour $\langle\hat{\rho}\rangle$: besoin d'hypothèses physiques supplémentaires : variations rapides des forces et évolution "lente" de $\langle\hat{\rho}\rangle$

=> on va réaliser les moyennes stochastiques "localement en temps"

=> Besoin d'un développement à l'ordre 2 en temps pour intégrer les correlations.

La décohérence (modèle simple)

Evolution à l'ordre 2:

- ✓ Développement Taylor : $\hat{\rho}(t+dt) = \hat{\rho}(t) + dt\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dt^2}{2}\,\frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2}$
- ✓ Avec : $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2} &= -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{i}{\hbar}\frac{d\hat{\rho}}{dt}\hat{H} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho} + \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}\hat{H}\right) + \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho} + \frac{i}{\hbar}\hat{\rho}\hat{H}\right)\hat{H} \\
&= \frac{1}{\hbar^2}\left(2\hat{H}\hat{\rho}\hat{H} - \hat{H}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{\rho}_{ij}}{dt^2} &= \sum_{kl}\frac{1}{\hbar^2}\left(2\hat{H}_{ik}\hat{H}_{lj}\hat{\rho}_{kl} - (\hat{H}^2)_{ik}\delta_{jl}\hat{\rho}_{kl} - \hat{\rho}_{kl}\delta_{ik}(\hat{H}^2)_{lj}\right) \\
&= \sum_{kl}\frac{1}{\hbar^2}\left(2\hat{H}_{ik}\hat{H}_{lj} - (\hat{H}^2)_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}(\hat{H}^2)_{lj}\right)\hat{\rho}_{kl}
\end{aligned}
$$

- ✓ Moyennes stochastiques : $\langle\hat{H}\rangle = 0 \Rightarrow \langle[\hat{H},\hat{\rho}]\rangle \Rightarrow \langle\frac{d\hat{\rho}}{dt}\rangle = 0$

La décohérence (modèle simple)

Evolution à l'ordre 2:

- ✓ Développement Taylor $\hat{\rho}(t+dt) = \hat{\rho}(t) + dt\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dt^2}{2}\,\frac{d^2\hat{\rho}}{dt^2}$

$$\langle\hat{\rho}\rangle_{ij}(t+dt) \quad = \quad \langle\hat{\rho}\rangle_{ij}(t) + \frac{dt^2}{2\hbar^2}\sum_{kl}\left(2\langle\hat{H}_{ik}\hat{H}_{lj}\rangle - \langle\hat{H}^2\rangle_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}\langle\hat{H}^2\rangle_{lj}\right)\langle\hat{\rho}\rangle_{kl}(t)$$

$$\frac{d\langle\hat{\rho}\rangle_{ij}}{dt} \quad = \quad \frac{dt}{\hbar^2}\sum_{kl}\left(\langle\hat{H}_{ik}\hat{H}_{lj}\rangle - \frac{1}{2}\langle\hat{H}^2\rangle_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\langle\hat{H}^2\rangle_{lj}\right)\langle\hat{\rho}\rangle_{kl}$$

- ✓ Il ne reste plus qu'à calculer : $\hat{H} = \vec{f}(t)\cdot\vec{\sigma} \Rightarrow \langle f_a f_b\rangle = \frac{\eta\,\hbar^2}{dt}\delta_{ab}$ où [η]=s^{-1}

Auto-corrélation des forces stochastiques

$$\frac{dt}{\hbar^2}\langle\hat{H}^2\rangle_{ik} = \eta\sum_{a,b}\delta_{ab}(\sigma^a\cdot\sigma^b)_{ik} = \eta\sum_a\underbrace{(\sigma^a\cdot\sigma^a)}_{=\mathbb{I}_2}{}_{ik} = 3\eta\,\delta_{ik}$$

« diagonal »

$$\frac{dt}{\hbar^2}\langle\hat{H}_{ik}\hat{H}_{lj}\rangle = \eta\sum_{a,b}\delta_{ab}\sigma^a_{ik}\sigma^b_{lj} = \eta\sum_a\sigma^a_{ik}\sigma^a_{lj} = \ldots$$

La décohérence (modèle simple)

- ✓ Méta indices: $\alpha = 1$ $\alpha = 3$

$$\langle\hat{\rho}\rangle = \begin{pmatrix} \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow} & \langle\hat{\rho}\rangle_{\uparrow\downarrow} \\ \langle\hat{\rho}\rangle_{\downarrow\uparrow} & \langle\hat{\rho}\rangle_{\downarrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \eta \sum_a \sigma^a_{ik}\sigma^a_{lj} = \ldots = \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 4$ $\alpha = 2$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix}$$

Termes « densité »

Termes d'interférence

Solution des équations :

- ✓ Décroissance progressive des termes d'interference : $\rho_{\uparrow\downarrow}(t) = e^{-4\eta t}\rho_{\uparrow\downarrow}(0)$
- ✓ Conservation de la norme : $\rho_{\uparrow}(t) + \rho_{\downarrow}(t) = \mathrm{cst}$
- ✓ Mélange des populations : $\rho_{\uparrow}(t) - \rho_{\downarrow}(t) = e^{-2\eta t}\left(\rho_{\uparrow}(0) - \rho_{\downarrow}(0)\right)$

La décohérence (modèle simple)

Solution des équations :

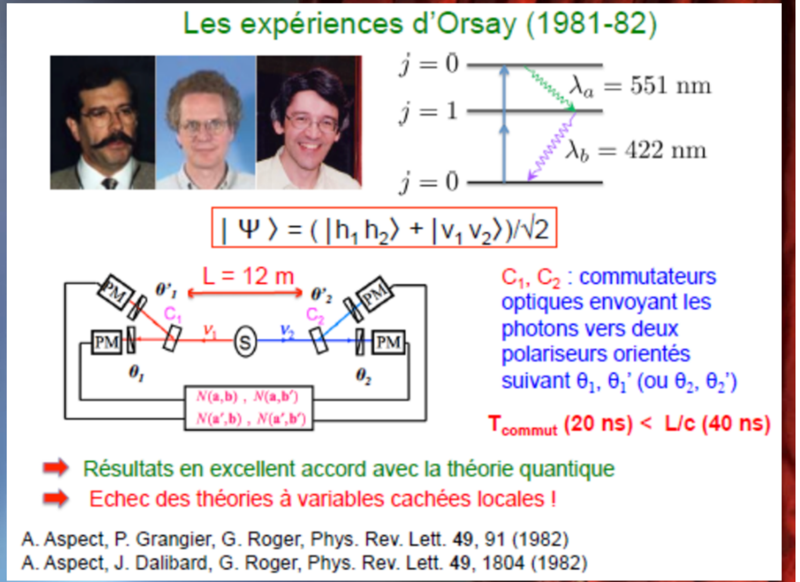
- ✓ État initial $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ ➡ $\langle\hat{\rho}\rangle(t=0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- ✓ Après t >> η^{-1} : $\langle\hat{\rho}\rangle(t) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Subsistance des seuls termes « classiques » (quoiqu'aléatoires): probabilité de trouver le spin up ou down)
- ✓ Décohérence quantique ⇔ diffusion statistique.
- ✓ Comportement générique => aussi vrai dans le cas de 2 spins intriqués
- ✓ Toute la question est la maîtrise de l'échelle temporelle 1/η (temps de relaxation)

	Poussière (10^{-3} cm)	Agrégat moléculaire (10^{-5} cm)	Molécule complexe (10^{-6} cm)
Dans l'air	10^{-36} s	10^{-32} s	10^{-30} s
Vide de laboratoire (10^{6} molécules par centimètre cube)	10^{-23} s	10^{-19} s	10^{-17} s
Vide parfait + éclairage solaire	10^{-21} s	10^{-17} s	10^{-13} s
Vide intergalactique + rayonnement 3 K	10^{-6} s	10^{6} s ~ 11 jours	10^{12} s ~ 32 000 ans

E. Joos, H.D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, K. Kupsch et I.O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer-Verlag, 1996. Deuxième édition : 2003. (ISBN 3-540-00390-8)

Et maintenant…

Et maintenant…



Place à Alain ASPECT

https://www.youtube.com/watch?v=JCfeEPTeSdA

Ou

https://www.imt-atlantique.fr/fr/actualites/alain-aspect-prix-nobel-physique