Cours Physique et Applications Quantiques, UE-D FISE

Cours sur les Postulats. Exercices corrigés :

1. Un qbit est un système quantique avec seulement deux états possibles $|0\rangle = (1,0)$ et $|1\rangle = (0,1)$. Supposons que le qbit est dans un état initial $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et qu'il st soumis à un Hamiltonien $\hat{H} = E_0 \times \hat{\sigma}_3$, où $\hat{\sigma}_3$ est la matrice de Pauli :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Quelle est la probabilité en fonction du temps d'observer le système dans un état $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$?
   Il faudra d'abord calculer l'évolution de l'état $|\psi(t)\rangle$ à partir de l'équation de Schrödinger, notamment l'équation indépendant du temps qui nous permet de calculer les états et valeurs propres de l'Hamiltonien $\hat{H}$:

$$\hat{H}|\psi_E\rangle = E_0 \times \hat{\sigma}_3|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \tag{2}$$

   Comme l'Hamiltonien est déjà diagonal dans la base donnée $(1,0)$ et $(0,1)$, les valeur propres son E_0 et $-E_0$ et les états propres sont :

$$|\psi_{E_0}\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   et

$$|\psi_{-E_0}\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   Du coup la solution $|\psi\rangle$ est donnée par (voir planche 18 du cours sur les postulats) :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t}|1\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(|0\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}2E_0 t}|1\rangle\Big) \tag{5}$$

   La probabilité d'observer le système dans l'état $\phi\rangle$ sera $\parallel \langle\phi|\psi(t)\rangle \parallel^2$

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 0| - \langle 1|\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(|0\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}2E_0 t}|1\rangle\Big) \tag{6}$$

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(\langle 0| - \langle 1|\Big)\Big(|0\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}2E_0 t}|1\rangle\Big) = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(1 - e^{\frac{i}{\hbar}2E_0 t}\Big) \tag{7}$$

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(1 - \cos(2E_0 t/\hbar) - i\sin(2E_0 t/\hbar)\Big) \tag{8}$$

   et le module au carré donne :

$$\parallel \langle\phi|\psi(t)\rangle \parallel^2 = \frac{1}{4}\Big((1 - \cos(2E_0 t/\hbar))^2 + \sin^2(2E_0 t/\hbar)\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2E_0 t/\hbar)\Big) \tag{9}$$

$$\| \langle \phi|\psi(t)\rangle \|^2 = \sin^2 (E_0 t/\hbar) \tag{10}$$

(b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie du système en fonction du temps.
La valeur moyenne de l'énergie vaut

$$\langle E(t)\rangle = \langle \psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{11}$$

et à partir de l'équation (5)

$$\langle E(t)\rangle = \langle \psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\Big(E_0 - E_0\Big) = 0 \tag{12}$$

2. En supposant maintenant un Hamiltonien $\hat{H} = E_0 \times \hat{\sigma}_1$, où $\hat{\sigma}_1$ est la matrice de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

(a) Quelle est la probabilité en fonction du temps de trouver le système dans un état $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$?
Il faudra résoudre l'équation de Schrödinger indépendant du temps pour le nouveau Hamiltonien :

$$\hat{H}|\psi_E\rangle = E_0 \times \hat{\sigma}_1|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \tag{14}$$

Il faudra donc diagonaliser la matrice σ_1 pour trouver les états propres

$$\sigma_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{15}$$

donc le déterminant nulle implique que

$$Det(\sigma_1 - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = 0 \tag{16}$$

Donc $\lambda = \pm 1$
Pour $\sigma_1 \vec{v}_0 = \vec{v}_0$, on obtient $\vec{v}_0 = 1/\sqrt{2}(1,1)$ et pour $\sigma_1 \vec{v}_0 = -\vec{v}_1$, on obtient $\vec{v}_1 = 1/\sqrt{2}(1,-1)$
L'état initial du système est un état propre $\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et du coup $\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}(|0\rangle + |1\rangle)$

(b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie du système en fonction du temps.
La probabilité d'observer le système dans l'état $\phi\rangle$ sera $\| \langle \phi|\psi(t)\rangle \|^2$

$$\langle \phi|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 0| - \langle 1|\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) = 0 \tag{17}$$

Donc jamais l'état sera observé dans l'état $\phi\rangle$.