IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Moments cinétiques
TD2

UEE-D
Physique et Applications Quantique
28/10/2022

Exercice 1 : Effet Zeeman normal

Nous nous intéressons dans cet exercice à la levée de dégénérescence des niveaux d'énergies d'une particule dans un potentiel central (type atome d'hydrogène) en présence d'un champ magnétique.

L'atome d'hydrogène est composé d'un électron et d'un proton. Il est possible de séparer l'équation de Schrödinger du centre de masse de l'atome de l'équation de Schrödinger dite radiale qui décrit l'électron :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + V(r)\Psi(\vec{r}) = E_{0n}\Psi(\vec{r})$$

L'étude de l'atome d'hydrogène se résume alors à la résolution de cette équation portant sur son électron, où $V(r)$ est le potentiel coulombien : $V(r) = \frac{-e^2}{r}$ avec *r* la distance proton-électron, $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$, $m_e = 9.1\ 10^{-31}$ kg la masse de l'électron supposée très petite devant celle du proton, $q = 1.6\ 10^{-19}$ C la charge élémentaire, $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ la permittivité du vide.

On montre que dans le cas d'une particule soumis à un potentiel central, le Laplacien en coordonnées sphériques peut s'écrire :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{2\hbar^2 r^2},$$

où L^2 est l'opérateur associé au moment cinétique orbital.

0) Ecrire le Hamiltonien de l'électron de l'atome d'hydrogène $\widehat{H_0}$ sans champ appliqué, et montrer qu'il commute avec $\widehat{L^2}$ et $\widehat{L_z}$.

Les opérateurs $\widehat{H_0}$, $\widehat{L^2}$ et $\widehat{L_z}$ ont donc une base commune de vecteurs propres, et on montre que les niveaux d'énergies de l'électron sont quantifiés selon $E_{0n} = \frac{E_r}{n^2}$ où $E_r = \frac{e^2}{2a_0} = 13.6eV$ et la constante de Rydberg, $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529\text{Å}$ est le rayon de Bohr, et n est le nombre quantique principal.

On considère maintenant que l'atome est en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{z}$. On ne considère pas le spin de l'électron pour le moment. Le Hamiltonien de l'électron en présence du champ s'écrit :

$$\widehat{H} = \widehat{H_0} + \frac{B\mu_B}{\hbar}\widehat{L_z}$$

où $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr.

1) Montrer que $\hat{H}$ commute avec $\widehat{L_z}$. On note $|nlm>$ leur base de vecteurs propres communs.

2) Donner les valeurs propres de $\hat{H}$ notées $E_{n,m}$.

3) Placer sur un diagramme de niveaux d'énergie les états $|nlm>$ pour n = 1, 2, 3. Vérifier numériquement l'hypothèse $\mu_B B \ll E_r$ pour des champs réalisables expérimentalement. Quels sont les états qui restent dégénérés malgré l'application d'un champ $\vec{B}$? A quel degré ?

4) Les transitions d'un état $|nlm>$ vers un autre $|n'l'm'>$ doivent être conforme à la conservation du moment cinétique total. Cela donne dans ce cas de figure les règles de sélection suivantes :
$m' - m = -1,0,1$, $l' - l = -1,1$, et les transitions $m = 0 \longrightarrow m' = 0$ sont interdites.
Dessiner sur le diagramme d'énergies les transitions possibles et commenter le fait que les transitions $m = 0 \longrightarrow m' = 0$ ne soient pas permises.

5) On veut exciter un atome d'hydrogène de l'état $|2,1,1>$ vers $|3,2,2>$ placé dans un champ magnétique $B = 1.4$ T. A quelle fréquence doit émettre notre antenne ?

6) Les expériences montrent en réalité que chaque niveau d'énergie est séparé sous l'effet d'un champ en un nombre <u>pair</u> de niveaux, aussi appelé effet Zeeman anormal.
Justifier cette levée de dégénérescence en nombre pair de niveaux.

Exercice 2 : Addition de deux moments cinétiques

On considère deux particules de moment cinétique $j_1 = j_2 = 1$. On note j le moment cinétique du système total.

1) Quelle sont les valeurs possibles pour j.

2) On fixe j = 2. Ecrire l'état $|2,2>$ en fonction des $|j_1, j_2; m_1, m_2>$. Quel est le coefficient de Clebsch-Gordan associé ?

3) Ecrire les états $|2,1>$ et $|2,0>$ en fonction des $|j_1, j_2; m_1, m_2>$.

4) Facultatif : même calcul pour j=1 et j=0