IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Moments cinétiques
TD1
Correction

UEE-D
Physique et Applications Quantique
21/10/2022

On considère un système de moment cinétique orbital $\boldsymbol{L}$ dont l'espace des états est rapporté à une base de vecteurs propres $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$ communs à $\boldsymbol{L^2}$ et $\boldsymbol{L_z}$ avec $l = 0 \; ou \; 1$.

Question 1 :

a) Quelle est la dimension de cet espace ?

La base propre $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$ commune à $\boldsymbol{L^2}$ et $\boldsymbol{L_z}$ comprend les états propres $\{|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle; |\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle; |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle; |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle\}$. On est donc dans un espace de dimension 4.

b) Quelles sont les valeurs propres des opérateurs $\boldsymbol{L^2}$ et $\boldsymbol{L_z}$?

- Pour $\boldsymbol{L^2}$: la valeur propre $\boldsymbol{0}$ avec comme vecteur propre $|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle$, et la valeur propre $\boldsymbol{2}\hbar^{\boldsymbol{2}}$ avec comme vecteurs propres $|\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle; |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle; |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle$ (triplement dégénérés)
- Pour $\boldsymbol{L_z}$: la valeur propre $-\hbar$ avec comme vecteur propre $|\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle$, la valeur propre $\boldsymbol{0}$ avec comme vecteurs propres $|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle$ et $|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle$ (dégénérés 2 fois), et la valeur propre $+\hbar$ avec comme vecteur propre $|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle$

c) Ecrire les matrices liées aux opérateurs $\boldsymbol{L^2}$, $\boldsymbol{L_z}$, $\boldsymbol{L_x}$, et $\boldsymbol{L_y}$ dans la base $\{|\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m_z}\rangle\}$.

(Attention à l'ordre des kets dans la base propre pour l'écriture des matrices).

$$L^2 = \boldsymbol{2}\hbar^{\boldsymbol{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L_z} = \hbar \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Pour le calcul de $\boldsymbol{L_x}$, et $\boldsymbol{L_y}$, on utilise les opérateurs d'échelle $\boldsymbol{L_\pm} = \boldsymbol{L_x} \pm \boldsymbol{i} \, \boldsymbol{L_y}$ qui vérifient (cf CM1) :

$$\boldsymbol{L_\pm}|\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\rangle = \hbar\sqrt{\left((l \mp m)(l \pm m + 1)\right)} \, |\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} \pm \boldsymbol{1}\rangle$$

On projette ensuite ces opérateurs sur la base propre ensuite $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$:

$\boldsymbol{L_+}|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{L_-}|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\rangle = \boldsymbol{0}$ (les états $|0{,}1\rangle$ et $|0, -1\rangle$ n'existent pas)
$\boldsymbol{L_+}|\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle = \hbar\sqrt{2} \, |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle$ et $\boldsymbol{L_-}|\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle = \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{L_+}|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle = \hbar\sqrt{2} \, |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle$ et $\boldsymbol{L_-}|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle = \hbar\sqrt{2} \, |\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}\rangle$
$\boldsymbol{L_+}|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{L_-}|\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle = \hbar\sqrt{2} \, |\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle$

Les matrices de $L_\pm$ et L_- dans la base $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$ s'écrivent :

$$\boldsymbol{L_+} = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L_-} = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Et enfin, comme $\boldsymbol{L_x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L_+} + \boldsymbol{L_-})$ et $\boldsymbol{L_y} = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{L_+} - \boldsymbol{L_-})$, on obtient les matrices relatives à $\boldsymbol{L_x}$et $\boldsymbol{L_y}$:

$$\boldsymbol{L_x} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L_y} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} & \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>Question 2 :</u>

a) Exprimer les états propres $|l, \boldsymbol{m_x}\rangle$ communs à $\boldsymbol{L^2}$ et $\boldsymbol{L_x}$ en fonction des kets $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$.

- Il s'agit d'abord de calculer les valeurs propres de $\boldsymbol{L_x}$:

$$Det(\boldsymbol{L_x} - \boldsymbol{\lambda}\mathbb{I}_{\boldsymbol{d}}) = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\lambda} & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & -\boldsymbol{\lambda} & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \hbar/\sqrt{2} & -\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{\lambda} - \hbar)(\boldsymbol{\lambda} + \hbar)$$

On trouve comme pour $\boldsymbol{L_z}$, les valeurs propres $\mathbf{0}$ (dégénérés 2 fois), $-\hbar$ et $+\hbar$.

- On cherche ensuite les vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{L_x}$ exprimés la base propre $|\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m_z}\rangle$:

- Pour la valeur propre $-\hbar$:

$$|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = -\mathbf{1}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1}, -\mathbf{1}\rangle - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}|\mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$$

- Pour la valeur propre $\mathbf{0}$ (deux vecteur propres):

$$|\mathbf{0}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle$$

$$|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{0}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}|\mathbf{1}, -\mathbf{1}\rangle - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}|\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$$

- Pour la valeur propre $+\hbar$:

$$|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{1}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1}, -\mathbf{1}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}|\mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$$

b) Réciproquement, exprimer les états propres $|l, \boldsymbol{m_z}\rangle$ en fonction des kets $|l, \boldsymbol{m_x}\rangle$.

Il s'agit d'inverser le système précédent pour exprimer les kets $|\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m_z}\rangle$ dans la base des kets $|l, m_x\rangle$. On obtient :

$$|\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0},\boldsymbol{m_x}=\mathbf{0}\rangle$$
$$|\mathbf{1},-\mathbf{1}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=-\mathbf{1}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=\mathbf{0}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=\mathbf{1}\rangle$$

$$|\mathbf{1},\mathbf{0}\rangle = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=-\mathbf{1}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=\mathbf{1}\rangle$$
$$|\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\mathbf{1},-\mathbf{1}\rangle - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{1},\mathbf{0}\rangle + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,|\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle$$

Question 3 :

On considère que le système est dans l’état normé suivant exprimé dans la base $|l,\boldsymbol{m_z}\rangle$:

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = a\,|\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle + b\,|\mathbf{1},-\mathbf{1}\rangle + c\,|\mathbf{1},\mathbf{0}\rangle + d\,|\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle$$

a) On mesure maintenant simultanément $\boldsymbol{L^2}$ et $\boldsymbol{L_x}$. Quelle est la probabilité d’obtenir comme résultat de la mesure, les valeurs $\boldsymbol{L^2} = \mathbf{2}\hbar^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{L_x} = \hbar$?

Si on mesure $\boldsymbol{L^2} = \mathbf{2}\hbar^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{L_x} = \hbar$, ça veut dire que le système est dans l’état $|\mathbf{1},\boldsymbol{m_x}=\mathbf{1}\rangle$ après la mesure. La probabilité de ce résultat est donnée par $|\langle 1,\boldsymbol{m_x}=\mathbf{1}|\boldsymbol{\psi}\rangle|^2$:

$$\langle 1,m_x=1|\boldsymbol{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} = \frac{b+d+c\sqrt{2}}{2}$$

D’où une probabilité de $\left|\frac{b+d+c\sqrt{2}}{2}\right|^2$.

b) Calculer les valeurs moyennes des observables $\boldsymbol{L^2}$, $\boldsymbol{L_z}$, et $\boldsymbol{L_x}$.

On utilise la décomposition de $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ sur la base des $|\boldsymbol{l},\boldsymbol{m_z}\rangle$.

- Mesure de $\boldsymbol{L_z}$:
  - _ $-\hbar$ avec une proba de $|\langle 1,-1|\psi\rangle|^2 = b^2$
  - _ 0 avec une proba de $|\langle 0,0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1,0|\psi\rangle|^2 = a^2 + c^2$
  - _ $+\hbar$ avec une proba de $|\langle 1,1|\psi\rangle|^2 = d^2$

La valeur moyenne de $\boldsymbol{L_z}$ sera alors : $\langle \boldsymbol{L_z}\rangle = (d^2 - b^2)\,\hbar$.

- Mesure de $\boldsymbol{L^2}$:
  - _ 0 avec une proba de $|\langle 0,0|\psi\rangle|^2 = a^2$
  - _ $\mathbf{2}\hbar^2$ avec une proba de $|\langle 1,1|\psi\rangle|^2 + |\langle 1,0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1,-1|\psi\rangle|^2 = b^2 + c^2 + d^2$

La valeur moyenne de $\boldsymbol{L^2}$ sera alors : $\langle \boldsymbol{L^2}\rangle = (b^2 + c^2 + d^2)\,\mathbf{2}\hbar^2$.

Mesure de $\boldsymbol{L_x}$: On exprime $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ sur la base des $|\boldsymbol{l},\boldsymbol{m_x}\rangle$ (en utilisant le résultat de la question 2-b) :

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = a\,|\mathbf{0}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{0}\rangle + \frac{b+d-c\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = -\mathbf{1}\rangle + \frac{b-d}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{0}\rangle + \frac{b+d+c\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{1}, \boldsymbol{m_x} = \mathbf{1}\rangle$$

La mesure de $\boldsymbol{L_x}$ donne comme résultat :

- $-\hbar$ avec une proba de $|\langle 1, \boldsymbol{m_x} = -\mathbf{1}|\psi\rangle|^2 = (\frac{b+d-c\sqrt{2}}{2})^2$
- 0 avec une proba de $|\langle 0, \boldsymbol{m_x} = 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1, \boldsymbol{m_x} = 0|\psi\rangle|^2 = a^2 + (\frac{b-d}{\sqrt{2}})^2$
- $+\hbar$ avec une proba de $|\langle 1, \boldsymbol{m_x} = 1|\psi\rangle|^2 = (\frac{b+d+c\sqrt{2}}{2})^2$

La valeur moyenne de $\boldsymbol{L_x}$ sera alors :

$$\langle \boldsymbol{L}_x\rangle = \left((\frac{b+d+c\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{b+d-c\sqrt{2}}{2})^2\right)\hbar = \left(b+d+c\sqrt{2}\right)\hbar.$$

<u>Question 4 :</u>

On considère maintenant que le système est dans l'état $\boldsymbol{\psi} = |\mathbf{1}, \boldsymbol{m_z} = \mathbf{1}\rangle$:

Calculer les valeurs moyennes et les incertitudes (écarts quadratiques) des observables $\boldsymbol{L_x}$, et $\boldsymbol{L_y}$. Commenter la valeur du produit $\Delta\boldsymbol{L_x}\,\Delta\boldsymbol{L_y}$.

- On se trouve dans le cas particulier où $a = b = c = 0\ et\ d = 1$. Les valeurs moyennes de $\boldsymbol{L_x}$, et $\boldsymbol{L_y}$ sont nulles :

$$\langle \boldsymbol{L}_x\rangle = \langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{L}_x|\boldsymbol{\psi}\rangle = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \boldsymbol{L}_y\rangle = \langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{L}_y|\boldsymbol{\psi}\rangle = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} & \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Pour le calcul des écarts quadratiques, on exprime les matrices $\boldsymbol{L_x^2}$ et $\boldsymbol{L_y^2}$ dans la base des $|\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m_z}\rangle$.

$$\boldsymbol{L_x^2} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L_y^2} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\langle \boldsymbol{L_x^2} \rangle = \langle \boldsymbol{\psi} | \boldsymbol{L_x^2} | \boldsymbol{\psi} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\langle \boldsymbol{L_y^2} \rangle = \langle \boldsymbol{\psi} | \boldsymbol{L_y^2} | \boldsymbol{\psi} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

D'où $\Delta \boldsymbol{L_x} = \sqrt{\langle \boldsymbol{L_x^2} \rangle - \langle \boldsymbol{L}_x \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$, et $\Delta \boldsymbol{L_y} = \sqrt{\langle \boldsymbol{L_y^2} \rangle - \langle \boldsymbol{L}_y \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$

Et le produit $\Delta \boldsymbol{L_x} \Delta \boldsymbol{L_y} = \frac{\hbar^2}{2}$ conformément au principe d'incertitude :

$\Delta \boldsymbol{L_x} \Delta \boldsymbol{L_y} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_y] \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle \boldsymbol{i} \hbar \hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{z}} \rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{z}} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}$