IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire École Mines-Télécom	ELP111
	Fonctions électroniques logiques et analogiques
	Fiche séance **PC5 – SIMPLIFICATION DES FONCTIONS LOGIQUES**

1. LES OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

OA5 Simplifier une fonction logique à 3, 4 ou 5 entrées à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

Enjeu : Notion de complexité dans un processeur matériel de traitement de l'information.

2. LES CONCEPTS

2.1. POURQUOI SIMPLIFIER LES FONCTIONS LOGIQUES ?

Simplifier une fonction logique consiste à rechercher une expression de cette fonction conduisant à la réalisation d'un circuit de coût minimal. Il faut cependant noter que la minimisation à tout prix du nombre d'opérateurs n'est pas toujours le but recherché. Dans le cas de fonctions complexes, des contraintes de vitesse ou de testabilité peuvent aller à l'encontre d'une minimalisation des expressions. On peut, par exemple, être amené à augmenter la complexité des opérateurs d'un circuit pour accroître sa vitesse de fonctionnement, ou à limiter la simplification d'une fonction pour extraire du circuit des variables logiques internes.

2.2. SIMPLIFICATION PAR TABLEAU DE KARNAUGH

2.2.1. Introduction

Le diagramme ou tableau de Karnaugh est un **outil graphique** qui permet de **simplifier de façon méthodique** une fonction logique. Bien que les diagrammes de Karnaugh soient applicables en théorie à des fonctions ayant un nombre quelconque de variables, ils ne sont en pratique utilisables « à la main » que pour un nombre de variables inférieur ou égal à 6.

Dans la section 2.2.2, nous partons de la définition de l'adjacence logique pour expliquer pourquoi l'adjacence géométrique de deux termes dans le tableau de Karnaugh conduit à la simplification d'une variable d'entrée.

Dans la section 2.2.3, nous détaillons la construction du diagramme (ou tableau) de Karnaugh selon le nombre de variables d'entrée de la fonction.

Dans la section 2.2.4, nous décrivons le principe de la simplification géométrique à partir de regroupements et de la lecture des variables communes à chaque regroupement.

2.2.2. Adjacence logique

Deux termes sont dits **logiquement adjacents** s'ils ne diffèrent que par une variable. Par exemple, ABC et $\overline{A}BC$ sont deux termes produits adjacents, et $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$ et $\overline{A}+B+\overline{C}+D$ sont deux termes sommes adjacents.

La somme de deux produits adjacents et le produit de deux sommes adjacentes peuvent être simplifiés par mise en facteur, en raison des propriétés de distributivité réciproque des opérateurs ET et OU. En effet,

$$AB + A\overline{B} = A(B+\overline{B}) = A$$ (distributivité de ET par rapport à OU),

et

$$(A+B)(A+\overline{B}) = A + B\overline{B} = A$$ (distributivité de OU par rapport à ET).

Ainsi, à partir de la somme (resp. le produit) de 2 combinaisons de 2 variables, nous obtenons une seule variable. Une variable a donc été simplifiée, ce qui conduit à une fonction logique moins complexe. La diminution de la complexité est recherchée si l'on souhaite minimiser le coût d'un circuit.

Un tableau de Karnaugh est une **table de vérité disposée de telle sorte que tous les termes <u>logiquement adjacents</u> soient également <u>géométriquement adjacents</u>, afin de mettre visuellement en évidence les simplifications possibles**.

La méthode de Karnaugh est applicable à partir d'une représentation de la fonction sous une de ses deux formes algébriques canoniques. En pratique, la première forme canonique (forme disjonctive) est la plus utilisée. Par la suite, le principe de la simplification est détaillé dans ce cas, mais toutes les étapes décrites sont également applicables pour une représentation sous la forme conjonctive.

2.2.3. Construction d'un diagramme de Karnaugh

Dans un diagramme de Karnaugh, la correspondance entre adjacence logique et adjacence géométrique est due au codage des combinaisons de variables : deux combinaisons voisines ne varient que par un seul bit (codage de Gray). Chaque case du tableau représente un minterme, et pour une fonction de *n* variables, chaque case est adjacente à *n* autres cases, représentant les *n* mintermes adjacents.

Lors du remplissage du diagramme, la valeur logique 1 est inscrite dans les cases correspondant aux mintermes présents dans l'expression de la fonction, puis le tableau est complété par des 0. Les 0 peuvent être omis pour alléger l'écriture.

2.2.3.1. Fonction de 2 variables

La figure 2.1(a) donne la position des 4 mintermes dans un tableau de Karnaugh à 2 variables. La figure 2.1(b) montre la correspondance entre adjacence logique et adjacence géométrique : le terme $A\overline{B}$, repéré par le symbole ❶ est adjacent aux termes $\overline{A}\,\overline{B}$ et *AB*, repérés par le symbole ①. Sur la figure 2.1(c), le tableau est rempli dans le cas de la fonction $F_1 = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B$.

		A
	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A\overline{B}$
B	$\overline{A}B$	*AB*

(a)

		A
	①	❶
B		①

(b)

		A
	1	1
B	1	0

(c)

figure 2.1: diagramme de Karnaugh à 2 variables
(a) position des mintermes
(b) termes adjacents à $A\overline{B}$
(c) remplissage pour $F_1 = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B$

Le tableau de la figure 2.10 (d) présente une autre manière d'adresser les lignes et les colonnes du tableau, qui explicite directement les valeurs des entrées.

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

figure 2.2: diagramme de Karnaugh à 2 variables
(d) explicitation des valeurs des variables d'entrées

2.2.3.2. Fonction de 3 variables

(a)

		B	B, A	A
	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
C	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}\,BC$	ABC	$A\overline{B}\,C$

(b)

		B	B, A	A
	❶	①	②	①
C	①	②	❷	②

(c)

		B	B, A	A
	1	1	1	0
C	1	0	1	0

figure 2.3 : diagramme de Karnaugh à 3 variables
(a) position des mintermes
(b) termes adjacents à $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (symbole ❶) et à ABC (symbole ❷)
(c) remplissage pour $F_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$

Pour le terme ABC , l'adjacence géométrique est évidente. En revanche, pour retrouver l'adjacence géométrique dans le cas de $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, il faut remarquer que les cases aux deux extrémités de la première ligne sont adjacentes. Ceci est mis en évidence en représentant le tableau sous forme cylindrique comme le montre la figure 2.4.

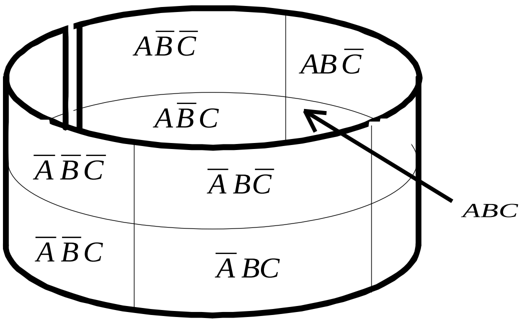


figure 2.4 : représentation cylindrique d' un tableau de Karnaugh à trois variables

Plus généralement, <u>deux cases situées aux extrémités d'une même ligne ou d'une même colonne sont adjacentes</u>. Ceci est dû au code de Gray qui est un code cyclique.

2.2.3.3. Fonction de 4 variables

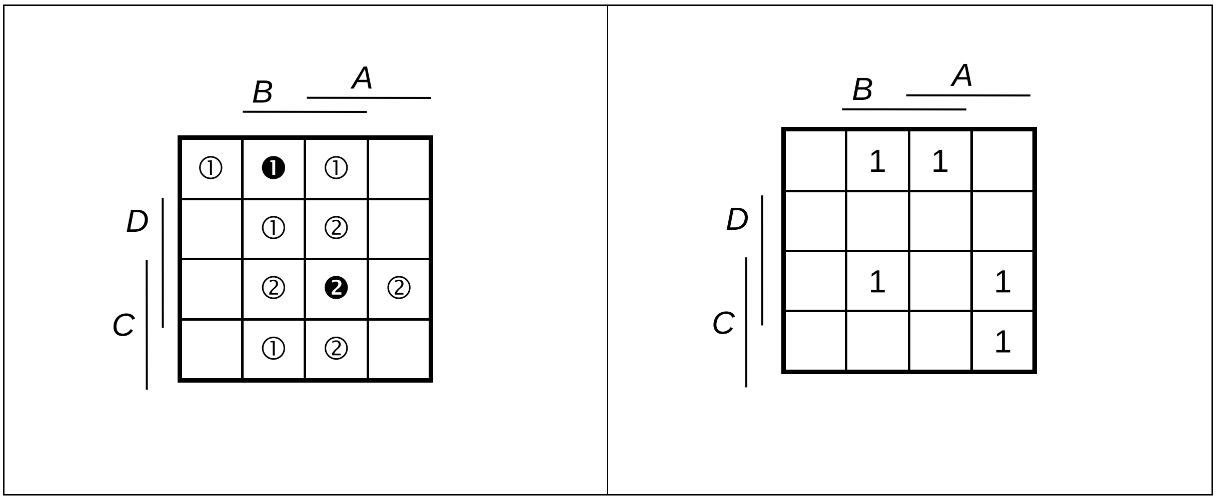
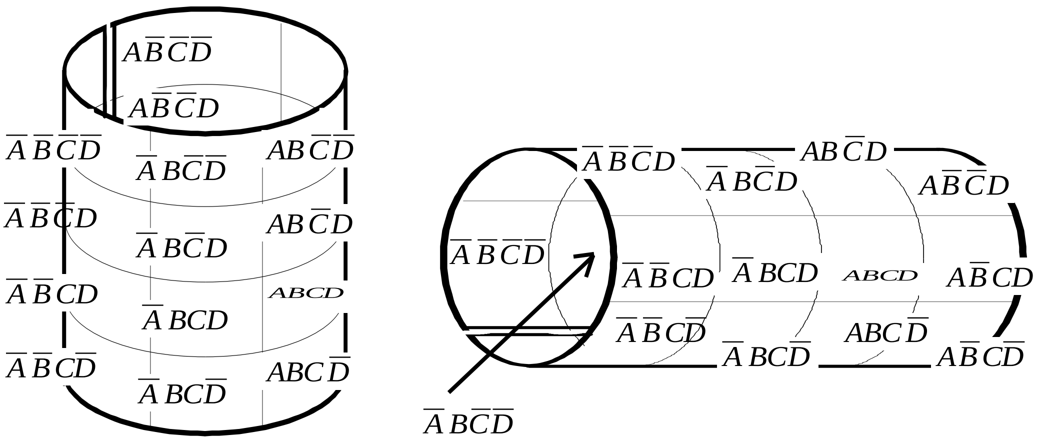


figure 2.5 : diagramme de Karnaugh à 4 variables

(a) termes adjacents à $\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ (symbole ❶) et à $ABCD$ (symbole ❷)

(b) remplissage pour $F_3 = \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$

Les adjacences sur les bords d'un tableau à quatre variables sont mises en évidence par les deux représentations de la figure 2.6.



(a) (b)

figure 2.6 : représentations cylindriques d'un diagramme de Karnaugh à quatre variables

(a) mise en évidence des adjacences entre lignes

(b) mise en évidence des adjacences entre colonnes

2.2.3.4. Fonctions de 5 et 6 variables

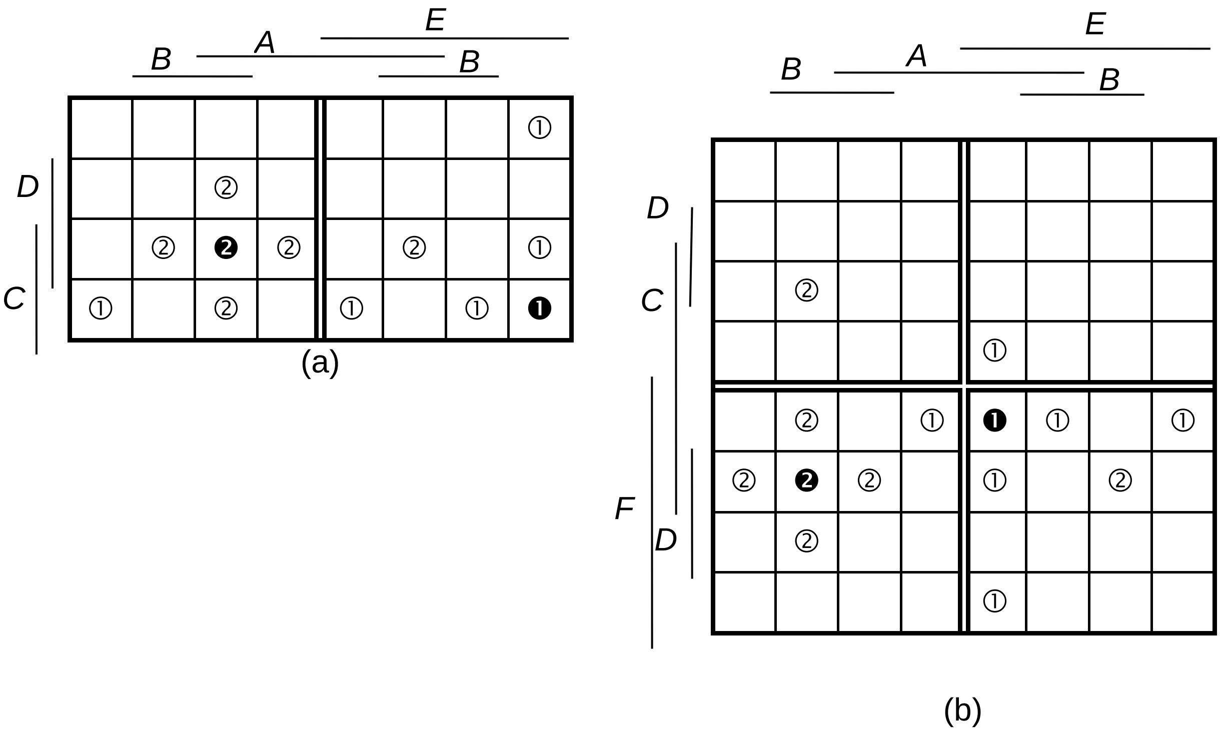


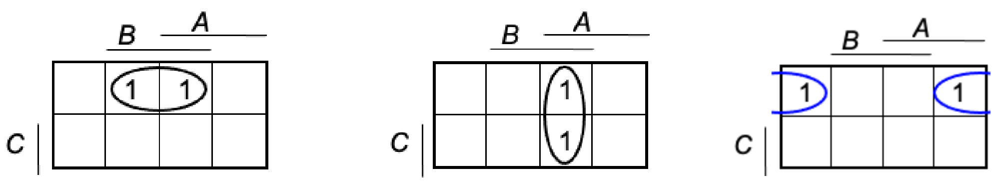
figure 2.7 : forme générale d'un diagramme de Karnaugh à 5 variables (a) et à 6 variables (b)
(a) termes adjacents à $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}E$ (symbole ❶) et à $ABCD\overline{E}$ (symbole ❷)
(b) termes adjacents à $A\overline{B}C\overline{D}EF$ (symbole ❶) et à $\overline{A}BCD\overline{E}F$ (symbole ❷)

On notera qu'à partir de 5 variables, le repérage des termes adjacents devient beaucoup plus délicat, et qu'une représentation similaire à celle de la figure 2.6 est irréalisable. La limite de cette méthode, utilisée « à la main », est donc liée au problème de visualisation des adjacences.

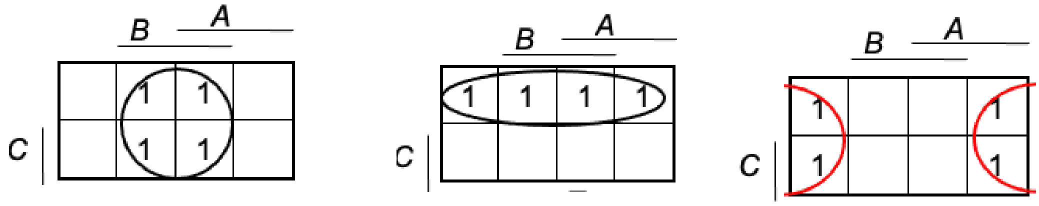
2.2.4. Principe de la simplification

On repère les cases adjacentes contenant un 1 et on les regroupe par paquets de 2^n. Un regroupement par 2^n correspond à la simplification par *n* variables.

- A titre d'exemple, pour une fonction de 3 variables (cf. figure 2.8)



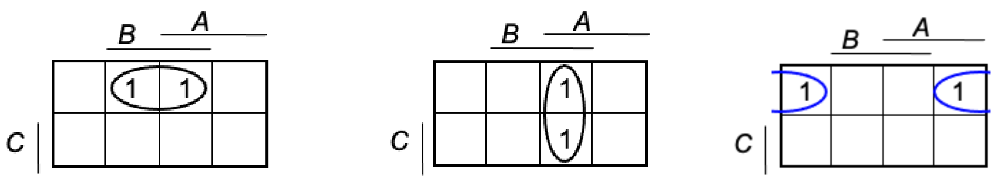
(a) $F = B\overline{C}$ (b) $F = AB$ (c) $F = \overline{B}\,\overline{C}$



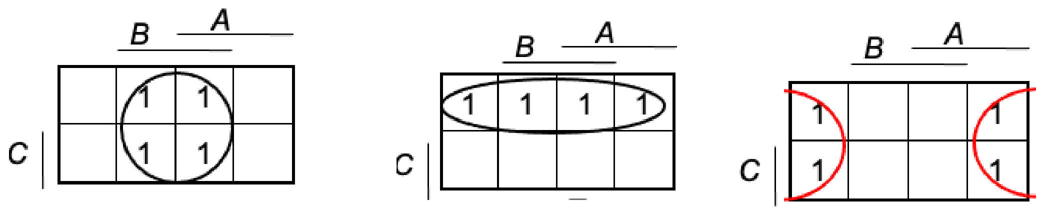
(d) $\mathrm{F} = B$ (e) $\mathrm{F} = \overline{C}$ (f) $\mathrm{F} = \overline{B}$

figure 2.8 :

- 1 case correspond à un minterme donc à un produit des 3 variables,
- 2 cases groupées représentent un produit de 2 variables : il y a simplification par la variable intervenant à la fois sous forme directe et sous forme complémentée. Trois exemples sont présentés dans les tableaux (a), (b), et (c) de la figure 2.8. Ainsi, pour le diagramme (a), $\mathrm{F} = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} = (\overline{A} + A)B\overline{C} = B\overline{C}$.
- 4 cases groupées représentent un « produit » de 1 variable, comme l'illustrent les diagrammes (d), (e), et (f). Par exemple, le diagramme (d) donne $\mathrm{F} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC = \overline{A}B(\overline{C} + C) + AB(\overline{C} + C) = \overline{A}B + AB = (\overline{A} + A)B = B.$ Toutes les variables intervenant à la fois sous forme directe et sous forme complémentée sont éliminées.
- 8 cases regroupées conduisent alors naturellement à F = 1.



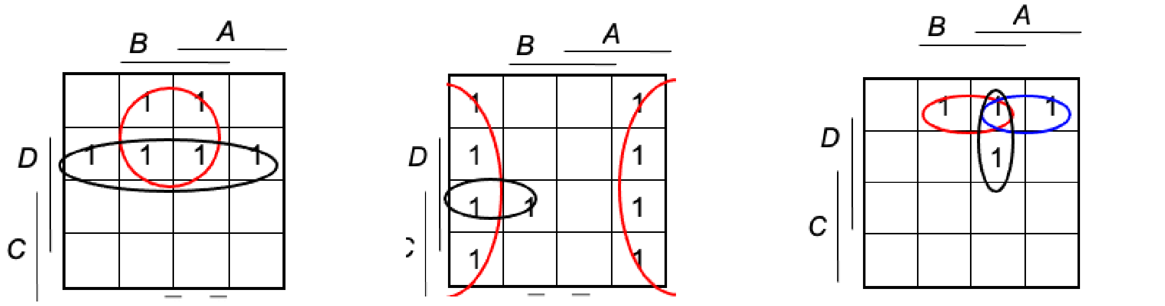
(d) $\mathrm{F} = B\overline{C}$ (e) $\mathrm{F} = AB$ (f) $\mathrm{F} = \overline{B}\,\overline{C}$



(d) $\mathrm{F} = B$ (e) $\mathrm{F} = \overline{C}$ (f) $\mathrm{F} = \overline{B}$

figure 2.8 : exemples de regroupements dans des diagrammes de Karnaugh à 3 variables

Dans le cas plus général où plusieurs regroupements sont possibles, il faut remarquer qu'une case peut être utilisée plusieurs fois, en raison de la propriété d'idempotence de la fonction OU : *A* + *A* + ... = *A*. Considérons les exemples de la figure 2.9 dans le cas de fonctions de 4 variables :



(a) $F = B\overline{C} + \overline{C}D$ (b) $F = \overline{B} + \overline{A}\,CD$ (c) $F = B\overline{C}\overline{D} + A\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}$

figure 2.9 : exemples de regroupements multiples dans des diagrammes de Karnaugh de 4 variables

2.2.4.1. Technique à appliquer sur un diagramme de Karnaugh quelconque

Pour obtenir une expression simplifiée minimale, il faut inclure tous les 1 du tableau dans des groupements de taille 2^n en respectant les principes suivants :

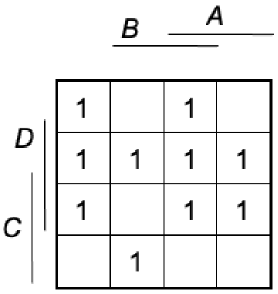
- Essayer de minimiser le nombre de groupements afin de minimiser le nombre de termes dans l'expression de la fonction. Il est alors préférable de rechercher les groupements en commençant par les cases qui ne peuvent se grouper que d'une seule façon. Ceci permet d'utiliser chaque 1 un minimum de fois.

- Vérifier que toutes les cases d'un groupe partagent le même nombre d'adjacences avec leurs congénères du groupe (soit n adjacences pour un groupe de 2^n cases).

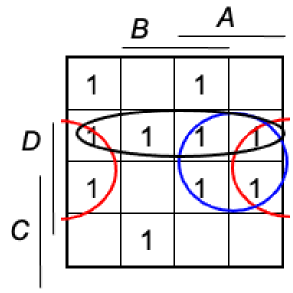
- Les groupements de 1 doivent être les plus grands possibles (minimisation du nombre de variables).

2.2.4.2. Exemples

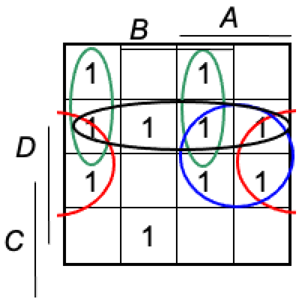
- **Exemple 1** : Simplification de
$F_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + ABCD + A\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D}$.



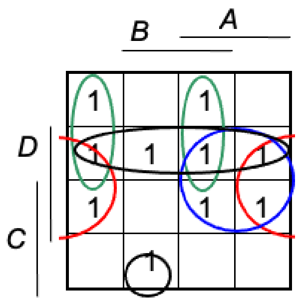
(a) diagramme de Karnaugh de F_1



(b) identification des groupes de taille 4



(c) identification des groupes de taille 2



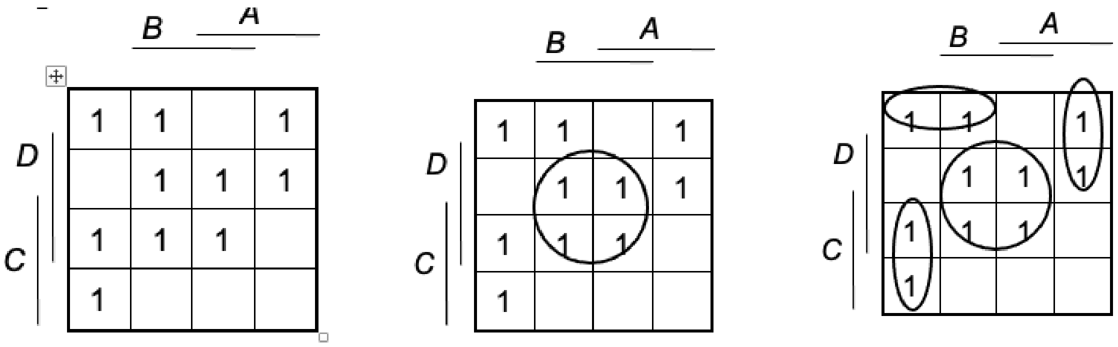
(d) identification des cases isolées

figure 2.10 : simplification de la fonction F_1

Après regroupement des 1 suivant les règles définies précédemment (figure 2.10), on obtient la forme simplifiée suivante : $F_1 = \overline{C}D + AD + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC\overline{D}$.

- **Exemple 2** : Simplification de

$$F_2 = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,\bar{D} + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,D + A\,B\,\bar{C}\,D + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D + \bar{A}\,B\,C\,D + ABCD + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D}.$$



(a) diagramme de Karnaugh de F_2

(b) identification des groupes de taille 4

(c) identification des groupes de taille 2

figure 2.11 : simplification de la fonction F_2

Les regroupements ont été effectués de façon à minimiser le nombre de groupes. On obtient alors $F_2 = BD + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C$.

- **Exemple 3** : On va traiter ici un exemple de simplification à partir de la représentation de la fonction sous la seconde forme canonique. On place alors dans le tableau les 0 correspondants aux maxtermes intervenant dans l'expression de la fonction : $F_3 = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$.

$A+B+C$	$A+\bar{B}+C$	$\bar{A}+\bar{B}+C$	$\bar{A}+B+C$
$A+B+\bar{C}$	$A+\bar{B}+\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	$\bar{A}+B+\bar{C}$

(a)

(b)

(c)

figure 2.12 : simplification de F_3 (représentée sous la deuxième forme canonique)

(a) position des maxtermes dans un diagramme de Karnaugh à 3 variables

(b) diagramme de la fonction F_3 : placement des 0

(c) résultat du regroupement des 0

On obtient, après simplification : $F_3 = (\overline{A} + \overline{C})(A + \overline{B})$.

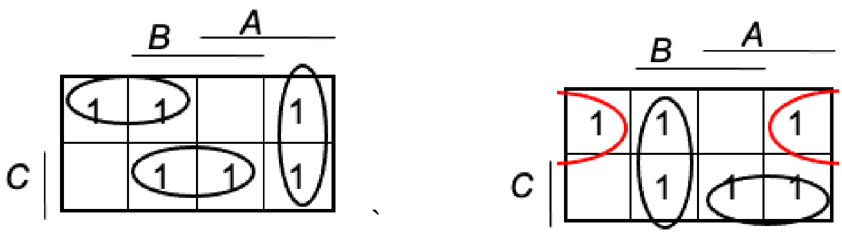
La lecture du résultat de regroupement des 0 est telle qu'une variable d'entrée égale à 1 correspond à cette variable complémentée dans l'expression finale. Ainsi dans l'exemple de la $F_3 = (\overline{A} + \overline{C})(A + \overline{B})$, la 1ère combinaison correspond à A=1 et C=1. Dans la 2nde combinaison, A=0 et B=1.

Une autre façon de faire consiste à d'abord obtenir la fonction simplifiée $\overline{F}$, en considérant les 0 comme des 1 dans le tableau de Karnaugh, et en en faisant la lecture correspondante (comme si on cherchait la 1ère forme canonique). Puis de complémenter la fonction simplifiée à l'aide du théorème de De Morgan, pour obtenir F.

Ainsi on lit $\overline{F_3} = (\bar{A}.B) + (A.C)$ puis on complémente et on applique le théorème de De Morgan :

$$F_3 = \overline{(\bar{A}.B) + (A.C)} = (A + \bar{B}).(\bar{A} + \bar{C})$$

Remarque : Le résultat de la simplification peut ne pas être unique. Par exemple, soit $F_4 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$. La figure 2.13 donne deux résultats de simplification de même complexité.



(a) $F_4 = \overline{A}\,\overline{C} + BC + A\overline{B}$

(b) $F_4 = \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B + AC$

figure 2.13 : simplification de F_4

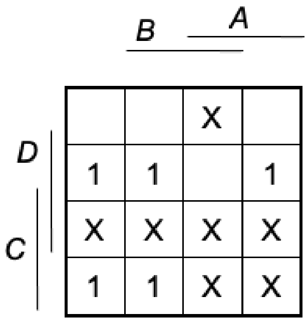
2.2.4.3. *Cas des fonctions incomplètement spécifiées*

Une fonction est dite **incomplètement spécifiée** si, pour certaines combinaisons des variables, elle prend indifféremment la valeur 0 ou la valeur 1, ou bien si l'occurrence de ces combinaisons n'est pas prévue dans la définition de la fonction. Dans ce cas, on a l'habitude d'inscrire un "X" ou un "-" dans les cases associées à ces combinaisons. On parle alors d'**états indifférents** ou **indéterminés** pour désigner les cases du diagramme correspondantes. Ces états peuvent être utilisés partiellement ou totalement pour simplifier la fonction. Les règles suivantes doivent alors être respectées :

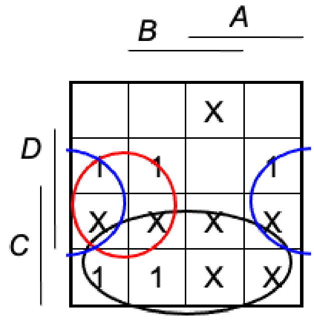
- Effectuer d'abord les regroupements sans tenir compte des cases X ou -,
- Utiliser ensuite les cases X ou - pour réunir les groupes préexistants ou augmenter leur taille,

- Ne jamais utiliser une case X ou - pour créer un nouveau groupe, ceci irait à l'encontre du principe de minimisation du nombre de termes.

- **Exemple** : Soit la fonction F_5 définie par le diagramme de la figure 2.14(a) (forme $\Sigma\Pi$).



(a)



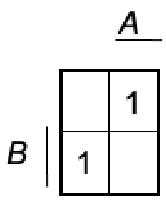
(b)

figure 2.14 : exemple de fonction incomplètement spécifiée

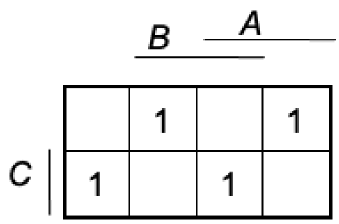
La présence d'états indifférents permet d'optimiser les regroupements comme indiqué sur la figure 2.14(b). Ainsi, pour l'écriture de F_5 sous forme simplifiée, les états indéterminés insérés dans les groupements sont considérés comme des 1 et les autres comme des 0. On obtient alors $F_5 = C + \overline{A}\,D + \overline{B}\,D$.

2.2.4.4. Les cas du OU exclusif et du ET inclusif

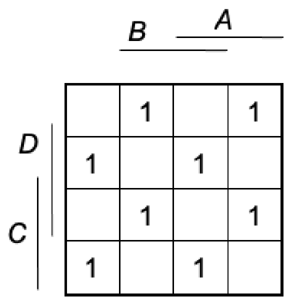
L'expression booléenne $A \oplus B \oplus C \oplus \ldots$ vaut 1 si elle contient un nombre impair de 1. Si l'on complète le diagramme de Karnaugh correspondant, on observe que, en raison du codage de Gray, le tableau a l'aspect d'un damier (Figure 2.15).



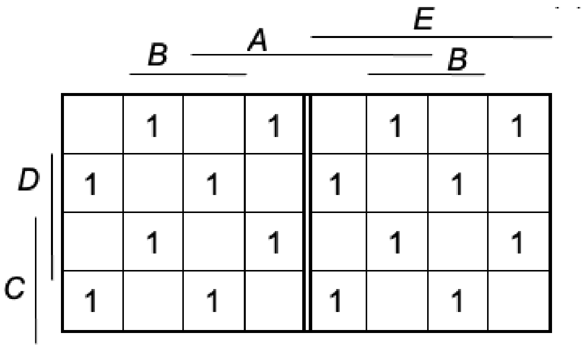
(a) $F = A \oplus B$



(b) $F = A \oplus B \oplus C$



(c) $F = A \oplus B \oplus C \oplus D$



(d) $F = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E$

Figure 2.15 : diagrammes de Karnaugh des opérateurs OU exclusif à 2, 3, 4 et 5 entrées

Pour obtenir les diagrammes de Karnaugh de la fonction ET inclusif, il faut échanger la place des 0 et des 1.

Dans les deux cas, la fonction n'est pas simplifiable sous la forme classique car aucun regroupement de 1 n'est possible. Il faut donc savoir reconnaître cet opérateur lorsqu'il apparaît dans un tableau de Karnaugh. Par exemple, la simplification de la fonction donnée par la figure 2.16 donne $F = A \oplus B \oplus C \oplus D + \overline{A}\,\overline{C} + BD$.

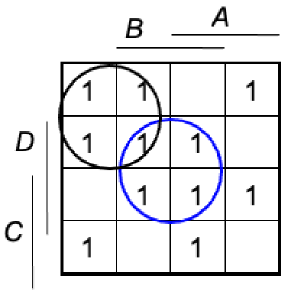


figure 2.16 : exemple de fonction contenant un OU exclusif

2.3. Conclusion

Lorsque le nombre de variables devient important, au-delà de 6, la manipulation des diagrammes de Karnaugh devient quasi-impossible. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes algorithmiques et d'utiliser un calculateur. Ce sont de telles méthodes qui sont utilisées dans les outils de synthèse automatique que l'on trouve actuellement sur le marché. Leur présentation sort du cadre de ce cours, mais les lecteurs intéressés pourront trouver de plus amples informations dans [Dan96] et [Sas93].

La minimisation des fonctions logiques permet une réalisation pratique utilisant un nombre minimal de composants, mais elle n'est pas une fin en soi. Dans les techniques actuelles d'intégration, la minimisation du nombre de composants n'est pas toujours le principal objectif : certaines contraintes de vitesse, de fiabilité peuvent même amener à augmenter la complexité d'un circuit. De plus, le progrès technologique aidant, la densité d'intégration est devenue aujourd'hui telle que le gain de quelques dizaines d'opérateurs logiques est souvent négligeable devant la complexité des circuits (plusieurs centaines de milliers d'opérateurs élémentaires par circuit en technologie CMOS).

2.4. REFERENCES

[Dan96] J. D. Daniels, *Digital design from zero to one*, John Wiley & Sons, 1996.

[GR87a] M. Gindre et D. Roux, *Electronique numérique : logique combinatoire et technologie, cours et exercices*, McGraw-Hill, Paris, 1987.

[LV86] J.-C. Lafont et J.-P. Vabre, *Cours et problèmes d'électronique numérique*, Ellipses, 1986.

[Sas93] T. Sasao, *Logic synthesis and optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[TP94] J.-L. Danger, C. Degois, A. Galisson, J. Leroux, D. Roux, *Composants et fonctions de l'électronique numérique, cours*, polycopié Télécom Paris, 1994.

3. EXERCICES D'APPLICATION

3.1. SIMPLIFICATION DES FONCTIONS A 3 ENTREES

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes suivantes :

1. $\mathrm{F}(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,C$

2. $\mathrm{F}(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,BC+A\overline{B}\,C+AB\overline{C}$

3. $\mathrm{F}(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$, sachant que la valeur de F pour les états $\overline{A}\,BC$ et ABC est indifférente.

4. $F(A,B,C)=(A+B+C).(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C).(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+B+C)$
   Utiliser les zéros du tableau de Karnaugh et donner le résultat sous forme conjonctive.

3.2. SIMPLIFICATION DES FONCTIONS A 4 ENTREES

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes suivantes

1. *À faire à la maison :*

   $$\mathrm{F}(A,B,C,D)=\overline{A}\,B\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D+AB\overline{C}\,D+\overline{A}\,BCD+A\overline{B}\,CD+\overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D}+ABC\overline{D}$$

2. $\mathrm{F}(A,B,C,D)=(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$
   $(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$

   Donner le résultat sous les deux formes algébriques, conjonctive et disjonctive.

3. *A faire à la maison :*

   $\mathrm{F}(A,B,C,D)=A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,B\overline{C}\,D+A\overline{B}\,CD+A\overline{B}\,\overline{C}\,D+\overline{A}\,BCD+\overline{A}\,BC\overline{D}+ABC\overline{D}$, sachant que quatre combinaisons de variables sont impossibles : $AB\bar{C}D$, $ABCD$, $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ et $A\bar{B}C\bar{D}$.

4. $\mathrm{F}(A,B,C,D)$ prend la valeur 1 pour les combinaisons suivantes des variables booléennes *A*, *B*, *C*, et *D* : $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}, \overline{A}\,B\overline{C}\,\overline{D}, \overline{A}\,B\overline{C}\,D, \overline{A}\,BC\overline{D}, AB\overline{C}\,D, ABC\overline{D}, A\overline{B}\,\overline{C}\,D$. La valeur de F peut être quelconque pour les combinaisons $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$, $\overline{A}\,BCD$, $A\overline{B}\,CD$, $\overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D}$, et $A\overline{B}\,C\overline{D}$.

3.3. SIMPLIFICATION ALGEBRIQUE A PARTIR DES PROPRIETES DES FONCTIONS LOGIQUES

Simplifier algébriquement les fonctions suivantes :

1. $\mathrm{F}_1=(X+Y)(\overline{X}+Y)$

2. *À faire à la maison* $\mathrm{F}_2=\overline{X}\,\overline{Y}+XY+\overline{X}\,Y$

4. POUR ALLER PLUS LOIN

4.1. SIMPLIFICATION ALGEBRIQUE

Elle consiste à appliquer les propriétés de l'algèbre de Boole (cf. PC4) aux expressions algébriques des fonctions logiques. Il s'agit principalement de « recettes » dont l'application demande un peu d'entraînement. Nous allons traiter quelques exemples qui permettront de passer en revue la plupart des astuces utilisées pour mener à bien les simplifications.

Dans les exemples suivants, la technique consiste à regrouper judicieusement les termes puis à simplifier en utilisant les relations de simplification vues à la PC4.

4.1.1. Exemple 1 : simplification de $F_1 = BC + AC + AB + B$.

$AB + B = B$, donc $F_1 = BC + AC + B$,

d'où $\boxed{F_1 = AC + B}$, car $BC + B = B$.

4.1.2. Exemple 2 : simplification de $F_2 = (A+\overline{B})(A\overline{B}+C)C$.

$(X + C)C = C$, d'où $\boxed{F_2 = (A+\overline{B})C = AC + \overline{B}C}$.

4.1.3. Exemple 3 : simplification de $F_3 = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC + \overline{A}BC$.

Il suffit de remarquer que $AX + \overline{A}X = (A+\overline{A})X = X$, et l'expression devient $\boxed{F_3 = B\overline{C} + BC = B}$.

Dans d'autres cas, il faut « compliquer » l'expression en utilisant les propriétés d'idempotence du ET et du OU, ou les propriétés de l'inversion, pour éliminer des termes superflus.

4.1.4. Exemple 4 : simplification de $F_4 = \overline{A}B + AC + BC$.

L'expression reste inchangée si le troisième terme est multiplié par 1 :

$$F_4 = \overline{A}B + AC + (A+\overline{A})BC.$$

En utilisant la distributivité de ET par rapport à OU, on obtient

$$\begin{aligned} F_4 &= \overline{A}B + AC + ABC + \overline{A}BC \\ &= \overline{A}B(1+C) + AC(1+B) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{F_4 = \overline{A}B + AC}$.

4.1.5. Exemple 5 : simplification de $F_5 = (\overline{A}+B)(A+C)(B+C)$.

On ne change pas F_5 en ajoutant 0 à l'un des termes :

$$F_5 = (\overline{A}+B)(A+C)(B+C+\overline{A}A).$$

En utilisant ensuite la distributivité de OU par rapport à ET, on obtient

$$\begin{aligned} F_5 &= (\overline{A}+B)(A+C)(\overline{A}+B+C)(A+C+B) \\ &= (\overline{A}+B+0.C)(A+C+0.B) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{F_5 = (\overline{A} + B)(A + C)}$.

Il peut également être utile de savoir reconnaître le OU exclusif et son complément !

4.1.6. Exemple 6 : simplification de $F_6 = (A\overline{B} + \overline{A}B).(AB + \overline{A}\,\overline{B})$.

On remarque que $F_6 = (A \oplus B).(\overline{A \oplus B})$, d'où $\boxed{F_6 = 0}$.

4.1.7. Conclusion

Les méthodes algébriques de simplification présentent un inconvénient majeur : elles ne sont pas systématiques, et leur efficacité dépend donc largement du savoir-faire de la personne qui les applique. Elles ne peuvent, par conséquent, être utilisées que ponctuellement sur des cas simples. Nous ne les utiliserons que ponctuellement dans les exercices.