	ELP111
IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire École Mines-Télécom	Fonctions électroniques logiques et analogiques
	Fiche séance **PC4 – ALGEBRE DE BOOLE**

1. LES OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

OA2 Représenter une fonction logique décrite par une proposition logique sous la forme d'une table de vérité, ou sous ses formes canoniques.

OA3 Appliquer des propriétés et des théorèmes tirés de l'algèbre de Boole.

OA4 Choisir la forme conjonctive ou disjonctive d'une fonction logique pour minimiser les ressources matérielles nécessaires à l'implantation matérielle de la fonction.

Enjeu : Notion de complexité dans un processeur matériel de traitement de l'information.

2. LES CONCEPTS

2.1. Introduction

Le fonctionnement des systèmes numériques repose sur la manipulation de variables et fonctions dont les valeurs sont représentées par des grandeurs physiques dites **binaires** car ne pouvant prendre que deux valeurs (généralement notées **0** et **1**). La structure mathématique permettant de formaliser les opérations de manipulation de ces grandeurs binaires est dite **algèbre de commutation** ou plus communément **algèbre de Boole**. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux bases et aux propriétés fondamentales de l'algèbre de Boole indispensables à la compréhension du fonctionnement des systèmes numériques.

2.2. Proprietes de l'algebre de Boole

2.2.1. Définitions

Dans l'algèbre de commutation, une variable ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeur possible. Une telle variable est dite **variable logique**, **variable binaire**, ou **variable booléenne**. De même, une fonction de *n* variables logiques ne peut prendre comme valeur que 0 ou 1. Elle est dite **fonction logique**, **fonction binaire**, ou **fonction booléenne**.

2.2.2. Table de vérité d'une fonction logique

C'est une table donnant l'état logique de la fonction pour chacune des combinaisons des états de ses variables. Une fonction de *n* variables est représentée par une table de vérité à *n*+1 colonnes et au plus 2^n lignes. Le tableau 2.1 donne la forme générale d'une fonction de deux variables logiques.

A	B	F(A,B)
0	0	F(0,0)
0	1	F(0,1)
1	0	F(1,0)
1	1	F(1,1)

tableau 2.1 : forme générale de la table de vérité d'une fonction de deux variables logiques

2.2.3. Les fonctions logiques élémentaires

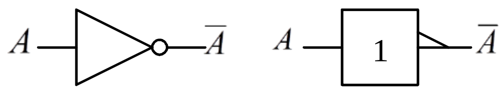
Trois fonctions suffisent pour définir une algèbre de Boole : la **complémentation**, le **produit logique,** et l'**addition logique**.

2.2.3.1. La fonction de complémentation ou fonction NON

Le complément de la variable *A* se note $\overline{A}$ (lire « *A* barre » ou « non *A* »). $\overline{A}$ vaut 1 (respectivement 0) si et seulement si *A* vaut 0 (respectivement 1). On parle encore de fonction d'**inversion logique**. Le tableau 2.2 donne la table de vérité de la fonction de complémentation. Les symboles usuellement utilisés pour représenter graphiquement l'opérateur correspondant, appelé **inverseur**, sont ceux de la figure 2.1.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

tableau 2.2 : table de vérité de la fonction NON



(a) (b)

figure 2.1 : symboles logiques d'un inverseur
(a) notation usuelle (ancienne notation US)
(b) notation normalisée IEEE (ancienne notation européenne)

2.2.3.2. La fonction produit logique ou fonction ET

Le produit logique de 2 variables se note *A.B*, *AB*, ou bien encore $A \wedge B$ (lire « *A* et *B* »). *A.B* vaut 1 si et seulement si *A* et *B* valent 1. Le tableau 2.3 donne la table de vérité de la fonction ET, et la figure 2.2 les symboles logiques de l'opérateur associé.

A	B	$A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

tableau 2.3 : table de vérité de la fonction ET

(a) (b)

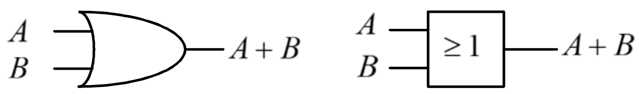
figure 2.2 : symboles logiques de l'opérateur ET.
(a) notation usuelle
(b) notation normalisée IEEE

2.2.3.3. La fonction addition logique ou fonction OU

L'addition logique de 2 variables se note *A+B* ou $A \vee B$ (lire « *A* ou *B* »). *A+B* vaut 0 si et seulement si *A* et *B* valent 0. Le tableau 2.4 donne la table de vérité de la fonction OU, et la figure 2.3 les symboles logiques de l'opérateur associé.

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

tableau 2.4 : table de vérité de la fonction OU



(a) (b)

figure 2.3 : symboles logiques de l'opérateur OU.
(a) notation usuelle
(b) notation normalisée IEEE

2.2.3.4. Propriétés des fonctions NON, ET, et OU

- *Commutativité des fonctions ET et OU :*

$$AB = BA$$
$$A + B = B + A$$

- *Associativité des fonctions ET et OU :*

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

- *Eléments neutres pour les fonctions ET et OU*

$$A.1 = 1.A = A$$
$$A + 0 = 0 + A = A$$

- *Eléments absorbants pour les fonctions ET et OU*

$$A.0 = 0.A = 0$$
$$A + 1 = 1 + A = 1$$

- *Propriété d'idempotence des fonctions ET et OU*

$$A.A = A$$
$$A + A = A$$

- *Propriétés de l'inversion logique*

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A}.A = 0$$
$$\overline{A} + A = 1$$

- *Distributivité de ET par rapport à OU*

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$

- *Distributivité de OU par rapport à ET*

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$
$$AB + C = (A + C)(B + C)$$

- *Autres relations utiles se déduisant des précédentes (relations de simplification)*

$$A + A.B = A.1 + A.B = A.(1 + B) = A$$
$$A.(A + B) = (A + 0).(A + B) = A + (0.B) = A$$
$$A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}).(A + B) = 1.(A + B) = A + B$$
$$A.(\bar{A} + B) = A.\bar{A} + A.B = A.B$$

N.B : Si certaines égalités ne vous paraissent pas triviales, c'est qu'elles font vraisemblablement appel à la propriété de distributivité du OU par rapport au ET.

- *Théorème de De Morgan*

$$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$$
$$\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$$

Ce théorème se généralise à un nombre quelconque de variables :

$$\overline{\sum_i X_i}=\prod_i \overline{X_i}$$
$$\overline{\prod_i X_i}=\sum_i \overline{X_i}$$

N. B. On notera que l'analogie entre l'addition logique (resp. produit logique) et l'addition (resp. multiplication) de l'arithmétique classique se limite à un nombre très restreint de propriétés.

2.2.3.5. Opérateurs secondaires

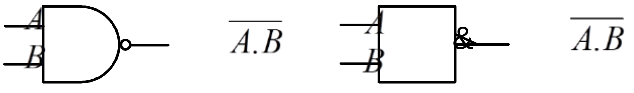
Dans les circuits logiques, on utilise également des opérateurs qui sont des combinaisons des fonctions ET, OU, et NON.

1. La fonction NON ET ou NAND : $\overline{A.B}$

La table de vérité de la fonction NON ET se déduit immédiatement de celle de la fonction ET par inversion du résultat (tableau 2.5).

A	*B*	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

tableau 2.5 : table de vérité de la fonction NON ET



(a) (b)

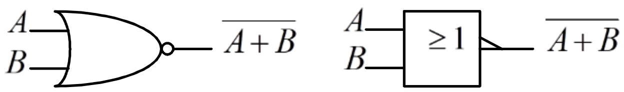
figure 2.4 : symboles logiques de l'opérateur NON ET.
(a) notation usuelle
(b) notation normalisée IEEE

1. La fonction NON OU ou NOR : $\overline{A+B}$

La table de vérité de la fonction NON OU se déduit immédiatement de celle de la fonction OU par inversion du résultat (tableau 2.6).

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

tableau 2.6 : table de vérité de la fonction NON OU



(a) (b)

figure 2.5 : symboles logiques de l'opérateur NON OU, (a) notation usuelle, (b) notation normalisée IEEE

2. Quelques propriétés des fonctions NON ET et NON OU

Les propriétés des fonctions NON ET et NON OU se déduisent des propriétés des fonctions élémentaires NON, ET, et OU.

$$\overline{AB} = \overline{BA} \qquad \overline{A+B} = \overline{B+A}$$

$$\overline{(AB)C} = \overline{A(BC)} = \overline{ABC} \text{ mais } \overline{\overline{AB}C} \neq \overline{A\overline{BC}}$$

$$\overline{(A+B)+C} = \overline{A+(B+C)} = \overline{A+B+C} \text{ mais } \overline{\overline{A+B}+C} \neq \overline{A+\overline{B+C}}$$

$$\overline{A.1} = \overline{A} \qquad \overline{A+1} = 0$$

$$\overline{A.0} = 1 \qquad \overline{A+0} = \overline{A}$$

$$\overline{A.A} = \overline{A} \qquad \overline{A+A} = \overline{A}$$

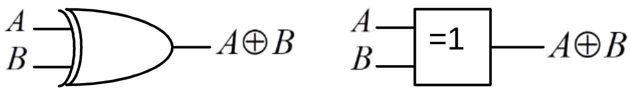
$$\overline{\overline{A}.A} = 1 \qquad \overline{\overline{A}+A} = 0$$

3. La fonction OU exclusif (abrégé OUEX ou XOR) : $A \oplus B = A.\overline{B} + \overline{A}.B$

4.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

tableau 2.7 : table de vérité de la fonction OU exclusif



(a) (b)

figure 2.6 : symboles logiques de l'opérateur OU exclusif.
(a) notation usuelle
(b) notation normalisée IEEE

- *Propriétés de la fonction OU exclusif*

$$A \oplus B = B \oplus A \quad (\text{commutativité})$$
$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C \quad (\text{associativité})$$
$$A \oplus 0 = A \qquad A \oplus 1 = \overline{A}$$
$$A \oplus A = 0 \qquad A \oplus \overline{A} = 1$$
$$A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$$

- *Utilisations courantes de la fonction OU exclusif*

$\Rightarrow$ Détection de deux éléments binaires différents,

$$A \oplus B = 1 \Leftrightarrow A \neq B$$

$\Rightarrow$ Détection d'un nombre de variables impair,

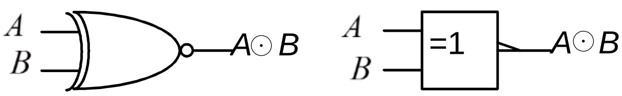
$$A \oplus B \oplus C \oplus \ldots = 1 \Leftrightarrow (A, B, C, \ldots) \text{ contient un nombre impair de 1}$$

$\Rightarrow$ Somme modulo 2 de deux éléments binaires.

5. La fonction ET inclusif (abrégé XNOR) : $A \odot B = \overline{A \oplus B} = A.B + \overline{A}.\overline{B}$

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

tableau 2.8 : table de vérité de la fonction ET inclusif



(a) (b)

figure 2.7 : symboles logiques de l'opérateur ET inclusif.
(a) notation usuelle
(b) notation normalisée IEEE

- *Propriétés de la fonction ET inclusif*

Les propriétés du ET inclusif se déduisent aisément des propriétés de la fonction OU exclusif en remarquant que

$$A \odot B = \overline{A \oplus B} = A \oplus \overline{B} = \overline{A} \oplus B$$

- *Utilisations courantes de l'opérateur ET inclusif*

  ⇒ Détection de deux éléments binaires égaux,

  $$\overline{A \oplus B} = 1 \;\Leftrightarrow\; A = B$$

  ⇒ Détection d'un nombre de variables pair,

  $$\overline{A \oplus B \oplus C \oplus \ldots} = 1 \;\Leftrightarrow\; (A, B, C, \ldots) \text{ contient un nombre pair de } 1$$

2.3. REPRESENTATION DES FONCTIONS LOGIQUES

2.3.1. Formes algébriques disjonctives, conjonctives, canoniques

Considérons la table de vérité de la fonction booléenne F de 3 variables *A*, *B*, et *C*, définie par le tableau 2.9.

A	*B*	*C*	numéro de la combinaison	F(*A*,*B*,*C*)	$\overline{F(A,B,C)}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	2	0	1
0	1	1	3	0	1
1	0	0	4	1	0
1	0	1	5	1	0
1	1	0	6	1	0
1	1	1	7	0	1

tableau 2.9 : table de vérité d'une fonction booléenne F de 3 variables

On peut extraire une expression de F en exprimant les combinaisons des variables *A*, *B*, et *C* pour lesquelles F est égale à 1 : F vaut 1 pour les combinaisons 0, 1, 4, 5, et 6, c'est-à-dire si $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = 1$, $\overline{A}\,\overline{B}C = 1$, $A\overline{B}\,\overline{C} = 1$, $A\overline{B}C = 1$, ou $AB\overline{C} = 1$. La fonction F peut donc s'écrire sous la forme :

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Dans cet exemple, si $A=B=C=0$, alors $F=1$ car $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = 1$. Toutes les autres combinaisons de variables d'entrée sont égales à 0.

L'expression obtenue est une somme logique de produits logiques, il s'agit d'une **forme algébrique disjonctive**. Les produits logiques font intervenir toutes les variables, sous leur forme directe ou complémentée. Ces produits élémentaires sont appelés **mintermes**. Pour *n* variables logiques, il existe 2^n mintermes différents, chaque minterme étant égal à 1 pour une seule combinaison des *n* variables. La représentation d'une fonction sous la forme d'une somme de mintermes est dite **forme canonique disjonctive** ou **première forme canonique**.

On peut extraire une seconde expression de F en exprimant les combinaisons des variables A, B, et C pour lesquelles F est égale à 0. F vaut 0 pour les combinaisons 2, 3, et 7, ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathrm{F}(A,B,C) = (A+\overline{B}+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

En effet, si $B = 1$ et $A = C = 0$ (ce qui correspond à la combinaison 2), alors $A + \bar{B} + C = 0$ et donc $F = 0$. Idem pour les combinaisons 3 et 7.

On peut également commencer par exprimer $\bar{F} = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.B.C$. En effet, $F = 0$ si $B = 1$ et $A = C = 0$. Puis appliquer le théorème de De Morgan sur cette expression pour obtenir F.

Comme pour la forme disjonctive, toutes les autres combinaisons sont, dans ce cas, égales à un. Cette nouvelle expression a une forme duale de la précédente. C'est un produit logique de sommes logiques, il s'agit d'une **forme algébrique conjonctive**. Les sommes logiques composant le produit font intervenir toutes les variables, sous leur forme directe ou complémentée. Elles sont appelées **maxtermes**. Pour *n* variables logiques, il existe 2^n maxtermes différents, chaque maxterme étant égal à 0 pour une seule combinaison des *n* variables. La représentation d'une fonction sous la forme d'un produit de maxtermes est dite **forme canonique conjonctive** ou **seconde forme canonique**.

2.3.2. Représentations de référence d'une fonction logique

Parmi les différentes représentations des fonctions logiques étudiées dans ce chapitre, trois d'entre elles peuvent être considérées comme des représentations de référence en raison de leur unicité :

- la table de vérité,
- les deux formes canoniques.

En effet, <u>deux fonctions logiques sont égales si et seulement si leurs tables de vérité ou leurs formes canoniques sont identiques</u>.

2.3.3. Critères de choix d'une représentation

L'un des deux types de représentation, forme disjonctive ou conjonctive, peut être préférable à l'autre si des contraintes sont imposées sur la réalisation matérielle des fonctions. En particulier, dans le cas de l'utilisation de **circuits logiques** réalisant les fonctions logiques élémentaires, le type de circuits disponibles peut favoriser une des deux formes.

Ainsi, la forme disjonctive est bien adaptée à une réalisation à base d'opérateurs NON ET. En effet, soit F une fonction de 4 variables écrite sous la forme disjonctive suivante (non canonique dans le cas traité, puisque les produits ne sont pas des mintermes) :

$$\mathrm{F}(A,B,C,D) = A.B + \overline{C}D$$

Pour réaliser cette fonction à l'aide d'opérateurs NON ET et d'inverseurs, il faut dans un premier temps transformer la fonction pour l'écrire sous la forme d'une combinaison de fonctions élementaires NON ET et d'inversion (application du théorème de De Morgan):

$$\mathrm{F}(A,B,C,D) = A.B + \overline{C}D = \overline{\overline{A.B + \overline{C}D}} = \overline{\overline{A.B}.\overline{\overline{C}D}}$$

Il reste ensuite à assembler le nombre adéquat d'opérateurs élémentaires pour réaliser F. La figure 2.8 montre un schéma de réalisation (ou **logigramme**) de F utilisant 3 opérateurs NON ET et 1 inverseur. Si l'opérateur d'inversion n'est pas disponible, il peut lui-même être réalisé à l'aide d'un opérateur NON ET, cf. §4.1.1.

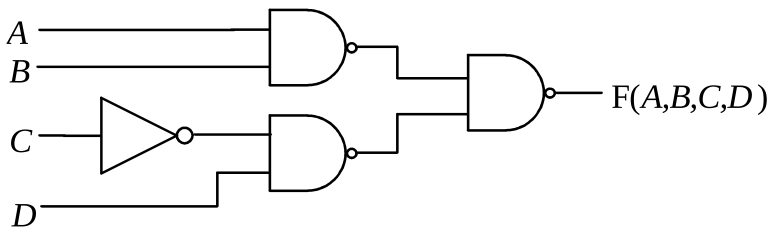


figure 2.8: logigramme de la fonction F à base d'opérateurs NON ET et d'un inverseur

De même, la forme conjonctive est bien adaptée à une réalisation à base d'opérateurs NON OU. En effet, soit une fonction G de 4 variables écrite sous une forme conjonctive :

$$\mathrm{G}(A,B,C,D) = (\overline{A}+\overline{B}).(C+D) = \overline{\overline{(\overline{A}+\overline{B}).(C+D)}} = \overline{\overline{\overline{A}+\overline{B}}+\overline{C+D}}$$

La fonction G peut être réalisée à l'aide de 3 opérateurs NON OU et 2 inverseurs (figure 2.9).

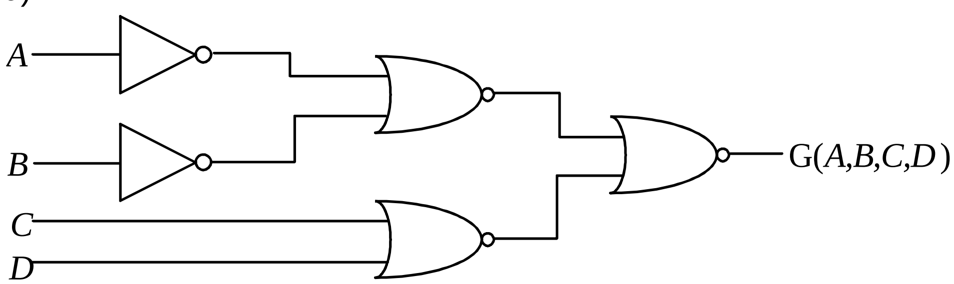


figure 2.9 : logigramme de la fonction G à base d'opérateurs NON OU et d'inverseurs

Lorsqu'aucune contrainte extérieure n'impose l'une des représentations, la forme disjonctive est traditionnellement plus utilisée que la forme conjonctive, en raison de l'analogie de notation entre les opérations logiques et arithmétiques.

Lors de la mise en œuvre d'une fonction logique dans un circuit, deux types de contraintes peuvent être prises en compte : optimiser la **vitesse** du circuit (c.-à-d. obtenir une fréquence maximale de fonctionnement la plus grande possible) ou bien optimiser sa **complexité** (c.-à-d. obtenir un encombrement sur silicium minimal). Dans le cas où la contrainte de **complexité** est la plus forte, il faut utiliser le minimum de matériel. Il est, pour cela, nécessaire de représenter la fonction à réaliser sous une forme simplifiée, c'est-à-dire utilisant un nombre minimal d'opérateurs. Le problème de la simplification des fonctions logiques est traité à la séance suivante.

3. EXERCICES D'APPLICATION

3.1. EXERCICE 1 : TABLE DE VERITE ET FORMES CANONIQUES

Établir les tables de vérité des fonctions suivantes, puis les écrire sous les deux formes canoniques :

$F_1 = XY + YZ + XZ$

$F_3 = (X + Y)(\bar{X} + Y + Z)$

À faire à la maison pour s'entrainer

$F_2 = X + Y.Z + \bar{Y}.\bar{Z}.T$

$F_4 = (\bar{X}+\bar{Y}+Z)(X+\bar{Y}+Z)(X+\bar{Y}+\bar{Z})(X+Y+\bar{Z})(X+Y+Z)$

3.2. EXERCICE 2 : THEOREME DE *DE MORGAN*

Complémenter les fonctions suivantes (sans simplifier) :

$F_1 = \bar{X}\bar{Y} + XY + \bar{X}Y$

$F_2 = X.(\bar{Y}.\bar{Z} + Y.Z) + \bar{X}.Y.\bar{Z} + \bar{X}.\bar{Y}.Z$

À faire à la maison pour s'entrainer

$F_3 = X\bar{Y} + Z\bar{T} + \bar{X}\bar{Y} + \bar{Z}\bar{T}$

3.3. EXERCICE 3 : FORME CANONIQUE (1)

Écrire sous la première forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

$f_1(a, b, c) = 1$ si et seulement si aucune des variables *A*, *B*, *C* ne prend la valeur 1

$f_2(a, b, c) = 1$ si et seulement si au plus une des variables *A*, *B*, *C* prend la valeur 0

Mettre les fonctions sous la seconde forme canonique.

À faire à la maison pour s'entrainer

$f_3(a, b, c) = 1$ si et seulement si exactement une des variables *A*, *B*, *C* prend la valeur 1

Mettre les fonctions sous la seconde forme canonique.

3.4. EXERCICE 4 : FORME CANONIQUE (2)

Écrire sous la seconde forme canonique la fonction définie par la proposition suivante:

$g(a,b,c) = 0$ si et seulement si aucune des variables *A*, *B*, *C* ne prend la valeur 1.

Mettre cette fonction sous la première forme canonique.

4. POUR ALLER PLUS LOIN

4.1.1. Opérateurs complets

Un opérateur logique est dit complet s'il permet de réaliser les trois fonctions de base de l'algèbre de Boole et, par conséquent, toutes les fonctions logiques. **Par exemple, l'opérateur NON ET est complet. Il en est de même pour l'opérateur NON OU**.

En effet,

$$\overline{A} = \overline{A.A}$$

$$A.B = \overline{\overline{AB}.\overline{AB}}$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A}.\overline{B}} = \overline{\overline{AA}.\overline{BB}}$$

De même,

$$\overline{A} = \overline{A + A}$$

$$A.B = \overline{\overline{A.B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{\overline{A + A} + \overline{B + B}}$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B} + \overline{A + B}}$$

En revanche, les opérateurs OU exclusif et ET inclusif, ne sont pas complets.